L'impianto di terra nelle linee a 3kV in c.c.

La valutazione della tensione totale di terra nel contesto Ferroviario

ing. Denis Cenedese

Rete Ferroviaria Italiana S.P.A.

10/11/2017

Introduzione

I parametri della LdC

Le protezioni

La Resistenza di Terra

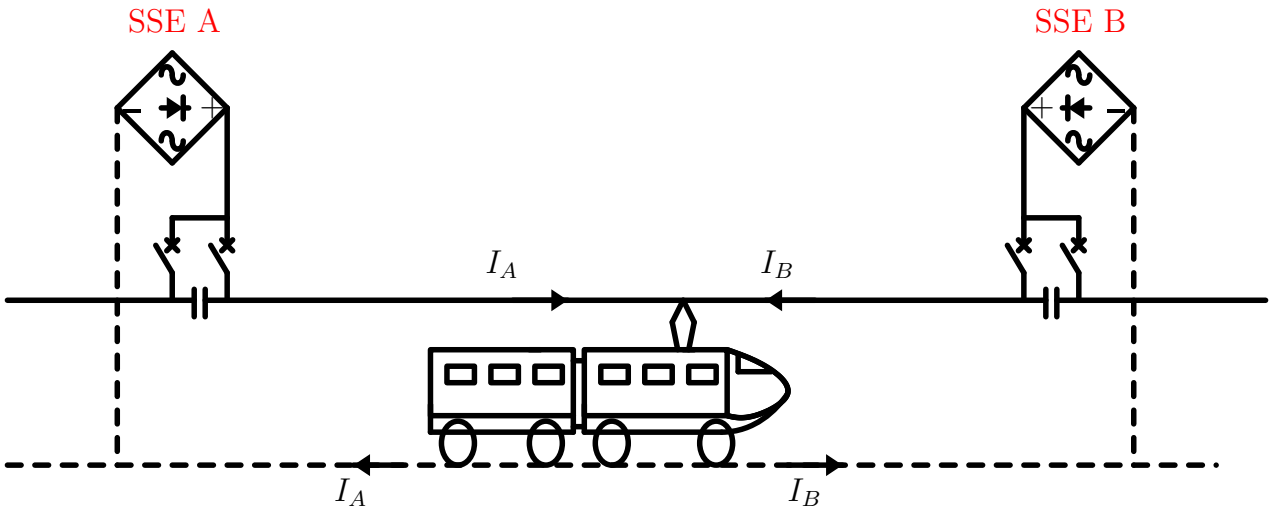
Tensione di Terra

L'accoppiamento

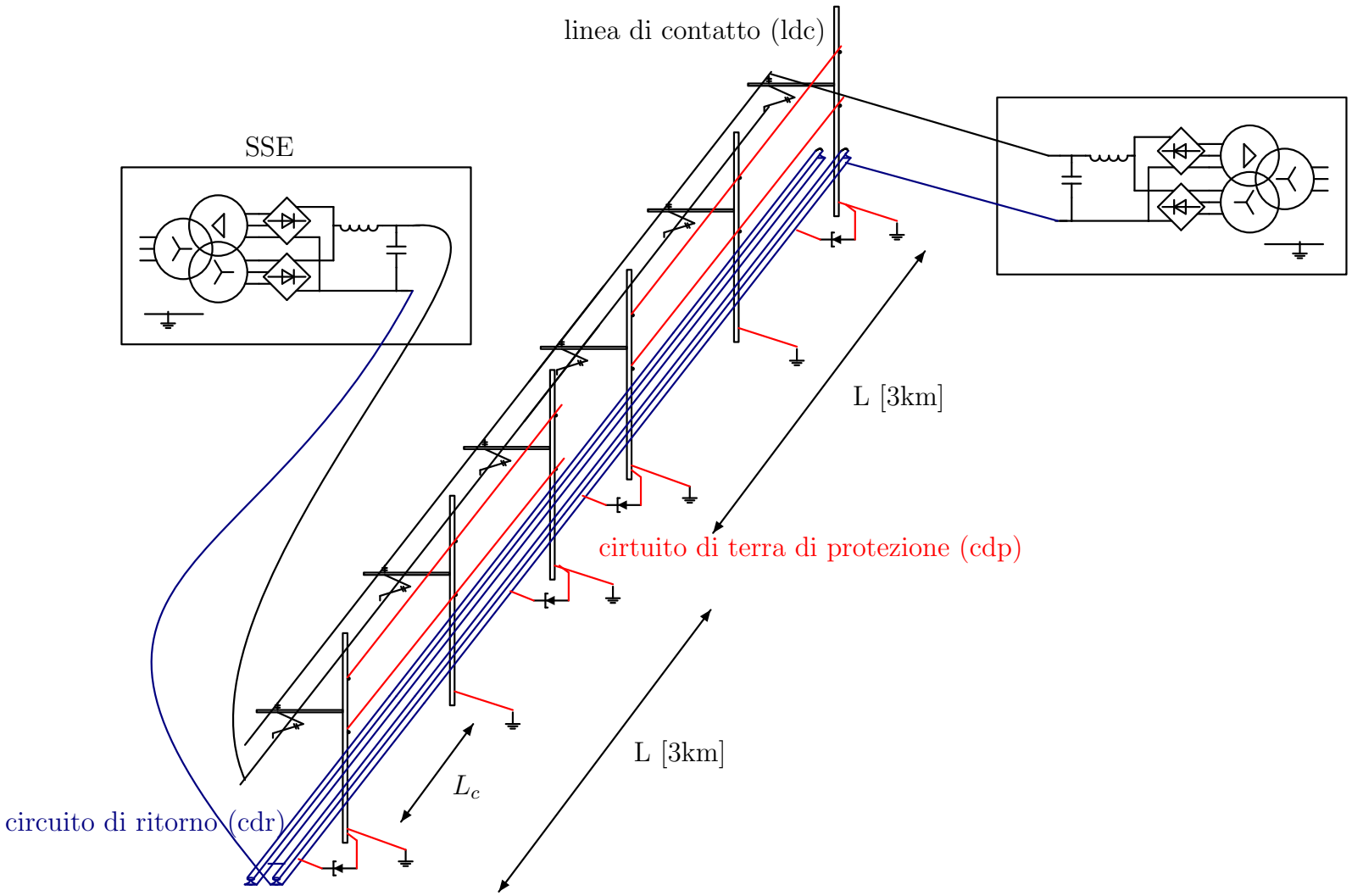
Generalità sulla LdC

introduzione

La configurazione tipica della linea qui esaminata, prevede l'alimentazione da due SSE,



altri sistemi che si incontrano nella pratica sono l'alimentazione a sbalzo, il parallelo nel punto intermedio, ecc


linea di contatto (ldc)
SSE
L [3km]
cirtuito di terra di protezione (cdp)
L [3km]
L_c
circuito di ritorno (cdr)

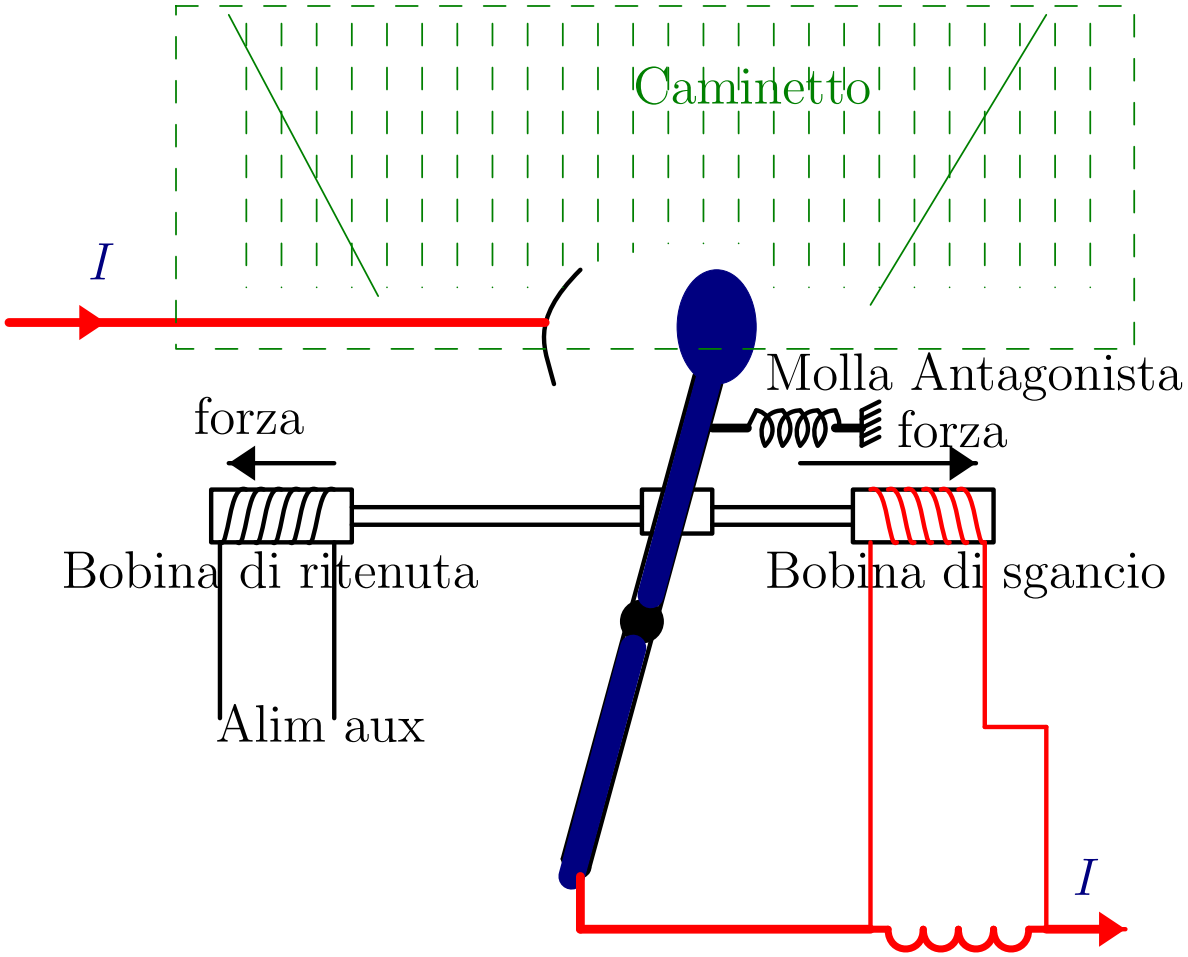
Gli impianti di Trazione Elettrica in corrente continua a 3 kV, analogamente agli altri sistemi di distribuzione di energia elettrica, devono garantire la protezione della linea da conseguenze dannose quali:

- il corto circuito (interruttori extrarapidi)
- la messa in tensione di parti metalliche accessibili (circuito di terra di protezione).

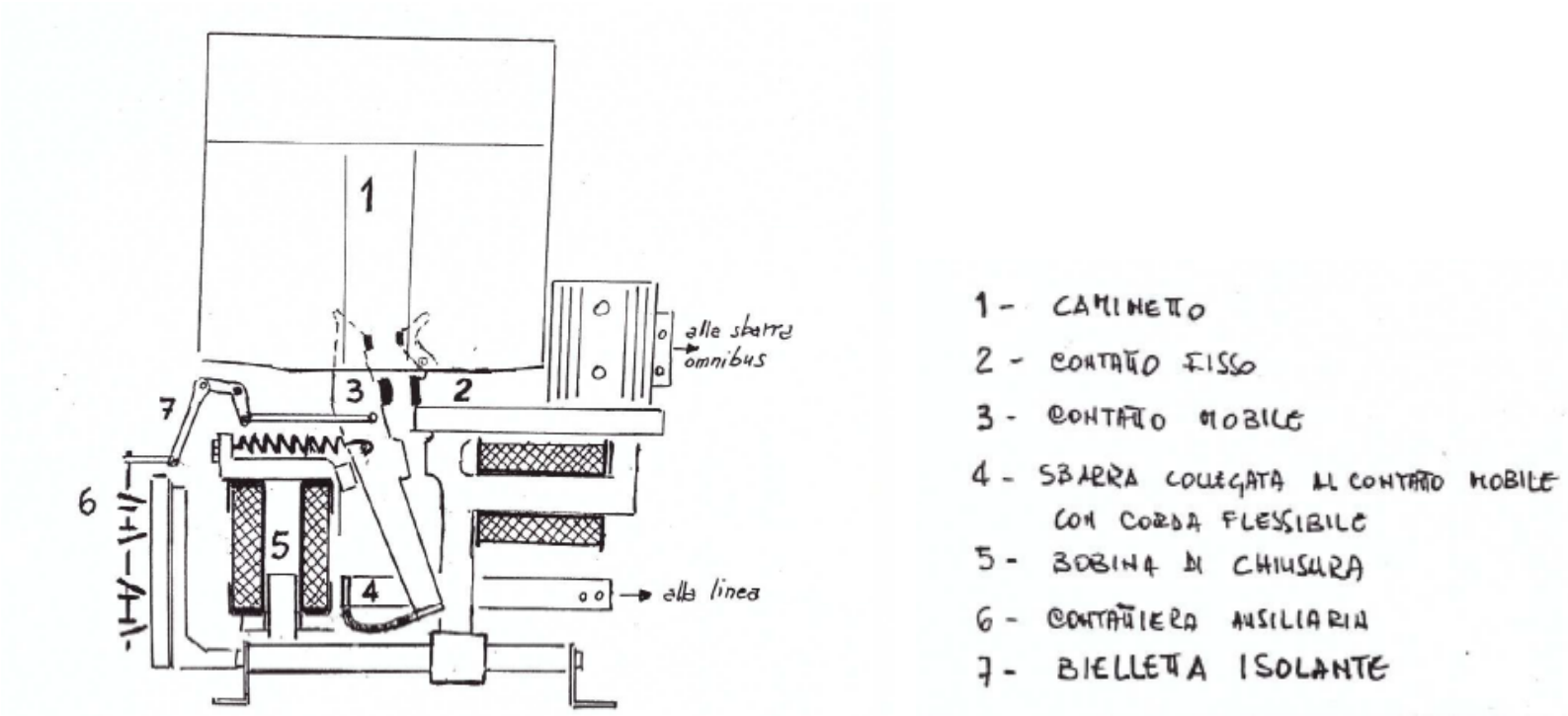
Gli impianti di Trazione Elettrica in corrente continua a 3 kV, analogamente agli altri sistemi di distribuzione di energia elettrica, devono garantire la protezione della linea da conseguenze dannose quali:

- il corto circuito (interruttori extrarapidi)
- la messa in tensione di parti metalliche accessibili (circuito di terra di protezione).

L'extrarapido - principio di funzionamento



L'extrarapido - principio di funzionamento



Il complesso meccanico dell'extrarapido è caratterizzato da una velocità di apertura estremamente ridotto ($20 - 40ms$).

L'extrarapido

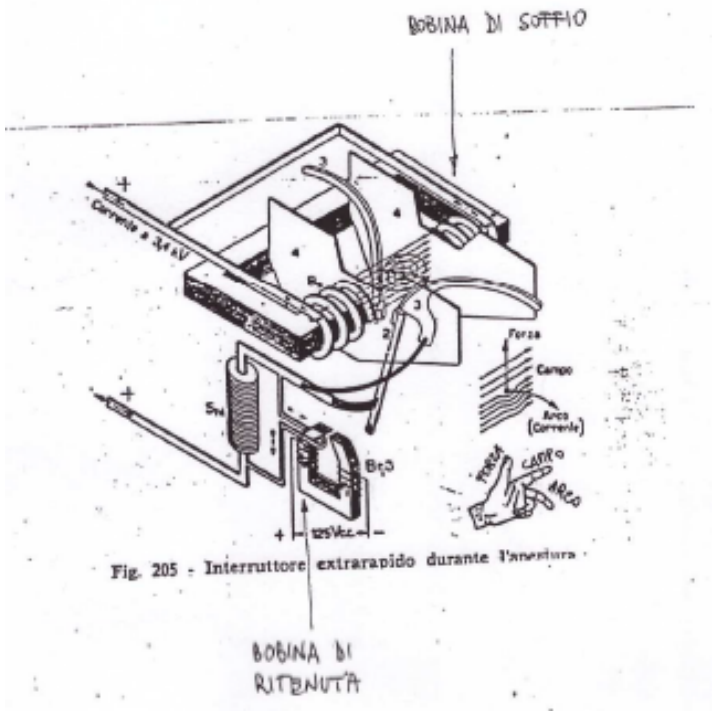
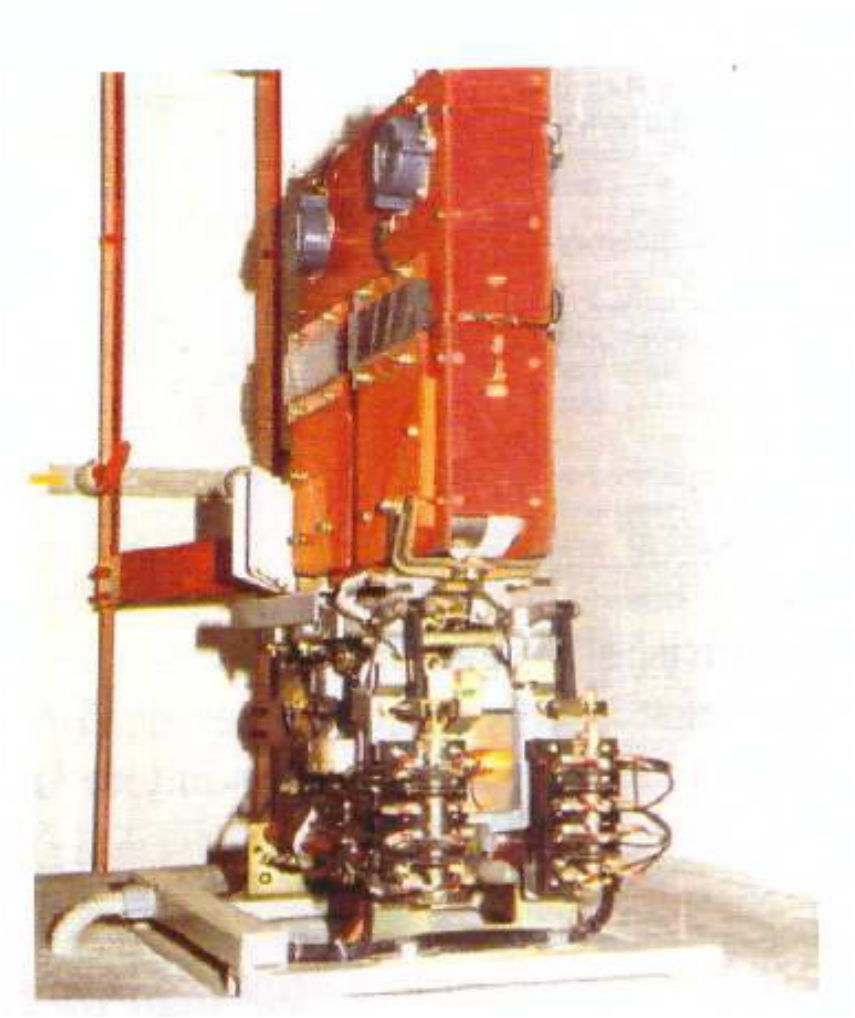


Fig. 205 - Interruttore extrarapido durante l'apertura



Come si vedrà le esigenze di garantire elevate prestazioni in alimentazione all'esercizio commerciale, ha portato ad una articolata evoluzione delle tecniche di protezioni nei confronti del *corto circuito*.
Verrà successivamente discusso l'*impianto di terra* della TE e delineato un metodo per poter valutare la tensione delle masse metalliche.

Le tipologie di corto circuito che si possono verificare sulla linea di contatto sono i seguenti:

- franco a rotaia (contatto diretto tra la L.d.C. e la rotaia),
- franco a circuito di protezione (contatto diretto tra la L.d.C. ed il circuito di protezione)
- cedimento dell'isolamento (scarica elettrica su un isolatore della L.d.C.)

Le tipologie di corto circuito che si possono verificare sulla linea di contatto sono i seguenti:

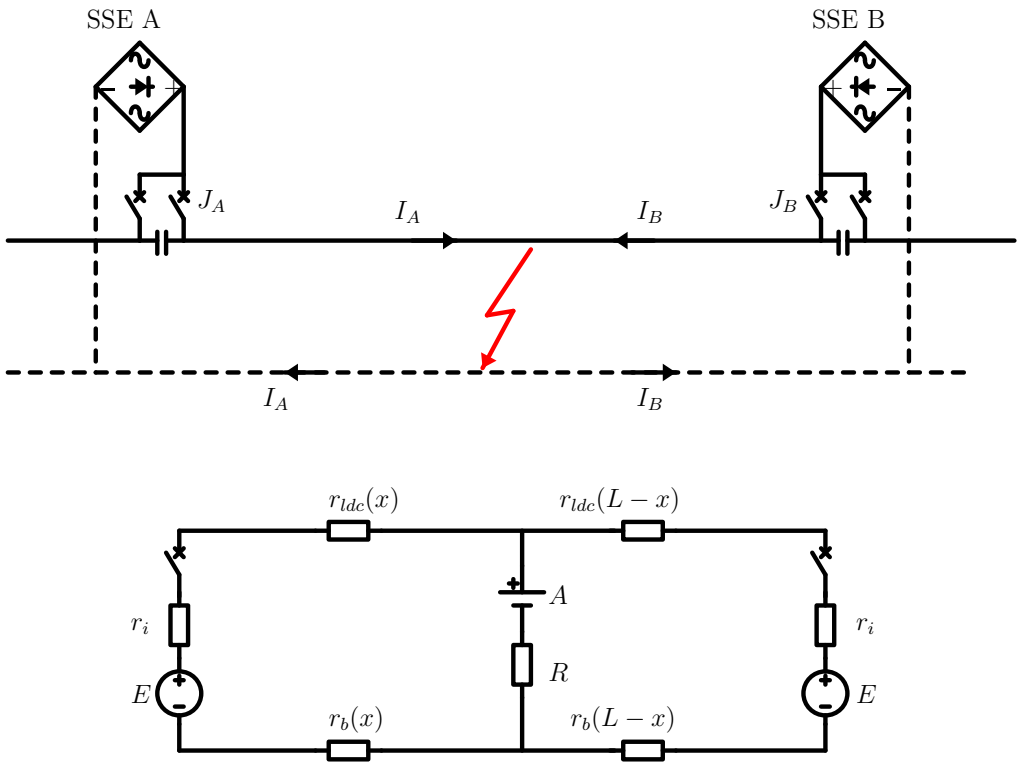
- franco a rotaia (contatto diretto tra la L.d.C. e la rotaia),
- franco a circuito di protezione (contatto diretto tra la L.d.C. ed il circuito di protezione)
- cedimento dell'isolamento (scarica elettrica su un isolatore della L.d.C.)

Le tipologie di corto circuito che si possono verificare sulla linea di contatto sono i seguenti:

- franco a rotaia (contatto diretto tra la L.d.C. e la rotaia),
- franco a circuito di protezione (contatto diretto tra la L.d.C. ed il circuito di protezione)
- cedimento dell'isolamento (scarica elettrica su un isolatore della L.d.C.)

Quest'ultimo caso dà luogo a correnti di corto inferiori più limitative, nei confronti del dimensionamento delle tarature per la protezione di linea (extrarapidi e sezionatori).

circuito di riferimento per taratura protezioni



La corrente di corto circuito è ridotta dalla tensione d'arco presente nel punto di guasto.

Di seguito i parametri che interessano nello studio del corto circuito

- $E(3600V)$ tensione massima a vuoto della SSE, supposta uguale per tutte le SSE
- r_i (0.16Ω) resistenza interna equivalente della SSE
- **A** (400V) tensione d'arco nel punto di guasto (valore sperimentale)
- **R** (0.15 Ω) resistenza di guasto
- r_{ldc} resistenza linea di contatto per km
- r_b resistenza del binario per km
- J_A,J_B interruttori extrarapidi
- **L** distanza massima linea a sbalzo, oppure distanza tra due SSE
- **x** distanza di un generico punto dalla SSE A

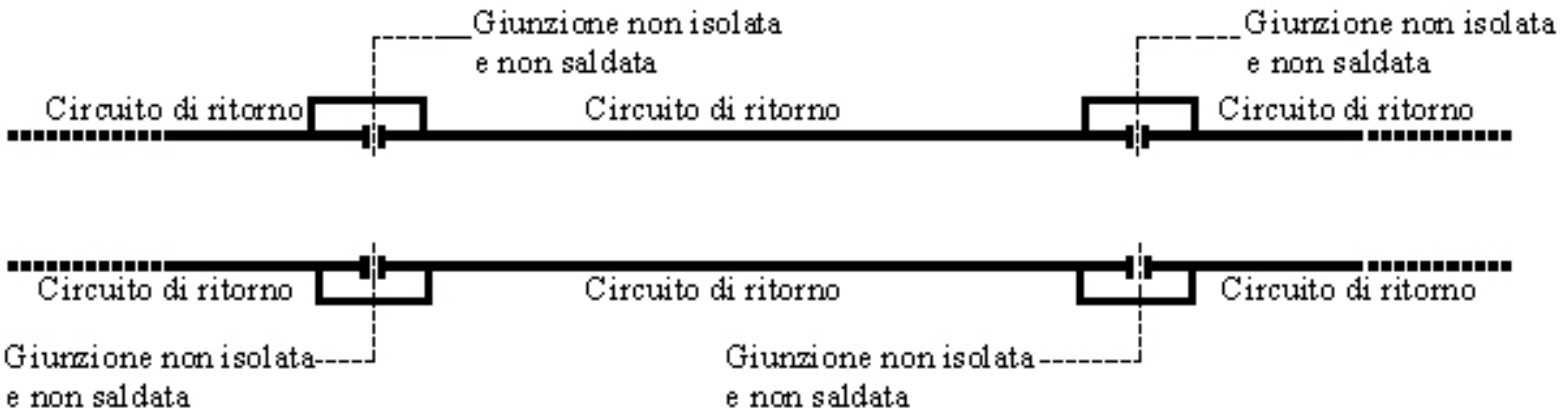
Resistenza lineare del trefolo

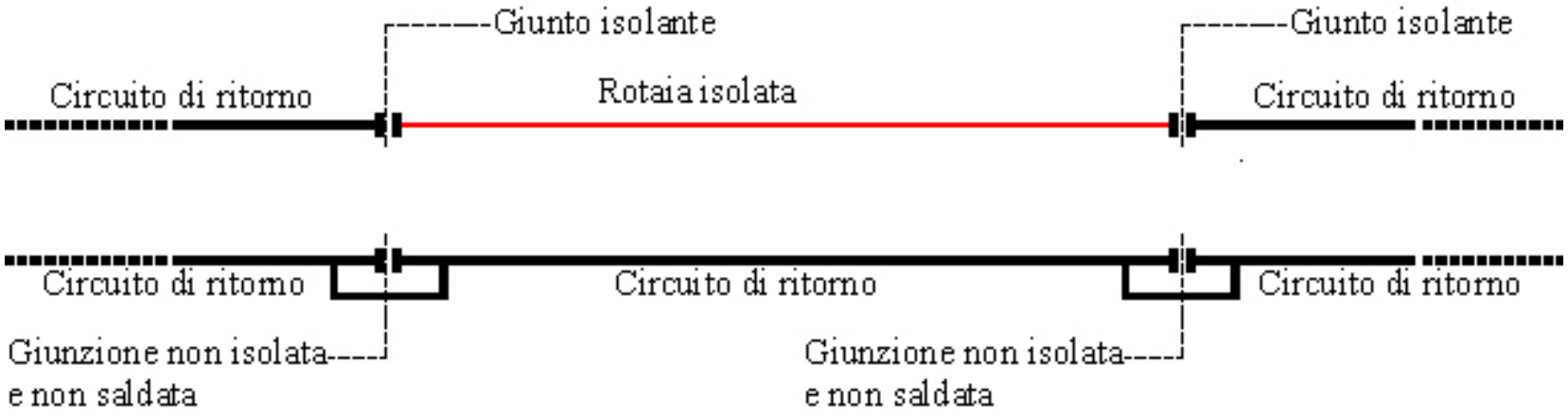
La resistività dell'Alluminio è $\varrho_{Al} = 28 \frac{\Omega mm^2}{km}$, il trefolo ha due corde per cui $r = \frac{\varrho}{S} = 0,112\,\Omega/km$, dove $S = 2 \times 125 = 250 mm^2$.

r_b resistenza del binario

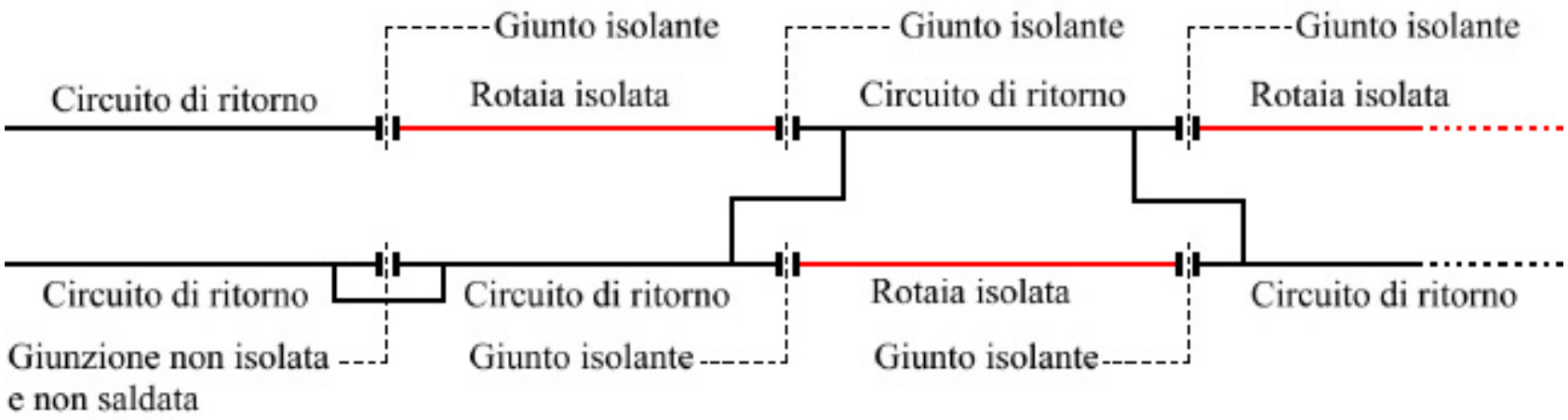
Per il circuito di ritorno costituito da lunga rotaia saldata, si ha resistività del ferro dolce $\varrho_{Fe} = 0,13\frac{\Omega mm^2}{m}$,
$r_b = \varrho_{Fe}/(m\ S) = 0.0169/m$ in Ω/km con $S = 7686mm^2$ Sezione rotaia UNI 60 ed m numero di rotaie.
Le forniture standard di binario non prevedono test di conduttività.

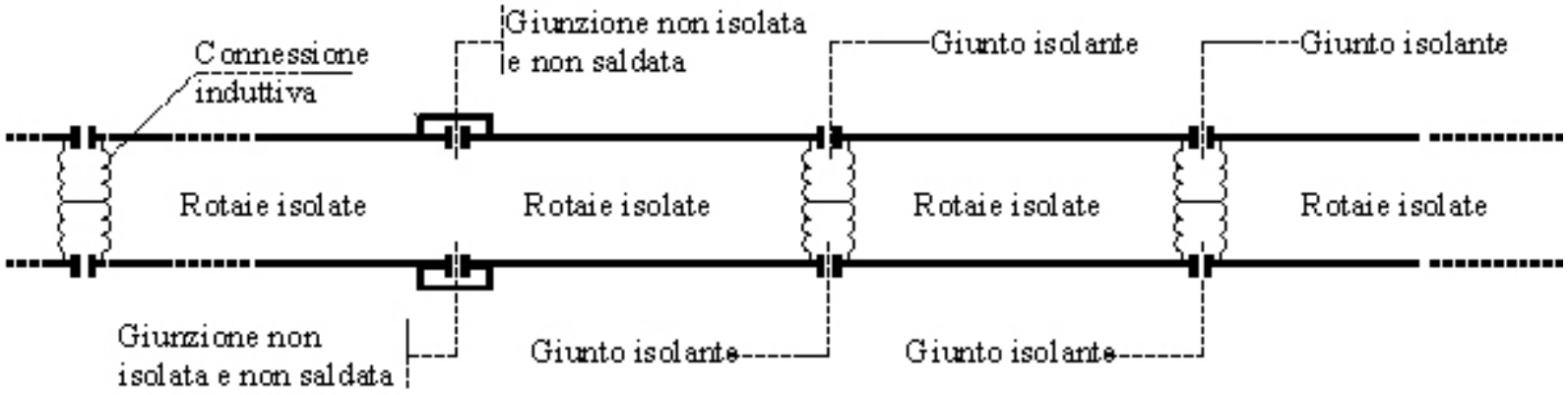
tipologie di cdr





tipologie di cdr





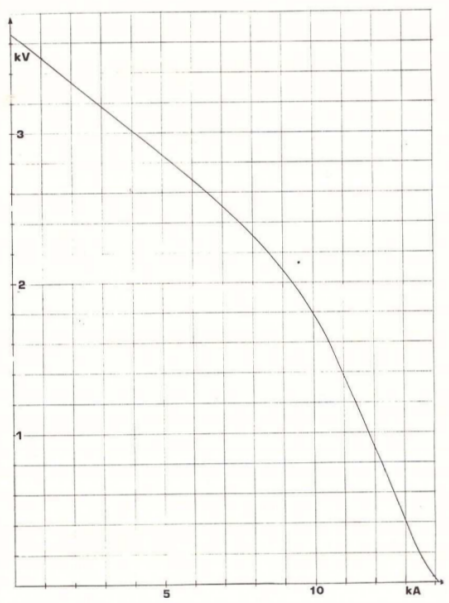
r_{ldc} resistenza della linea di contatto

resistività $\varrho_{Cu} = 17,78 \frac{\Omega mm^2}{km}$, la L.d.C. è composta da fili ($100 mm^2$) e funi o corde ($120 mm^2$)
per L.d.C. da due funi e due fili $S = 440 mm^2$,
per L.d.C. da due fili di contatto ed una corda portante $S = 320 mm^2$;
Nella valutazione delle tarature si tiene conto di una certa usura media del filo.

- $r_{ldc} = 0.06 \Omega / km$ per $S = 320 mm^2$;
- $r_{ldc} = 0.045 \Omega / km$ per $S = 440 mm^2$;

r_i resistenza interna equivalente della SSE

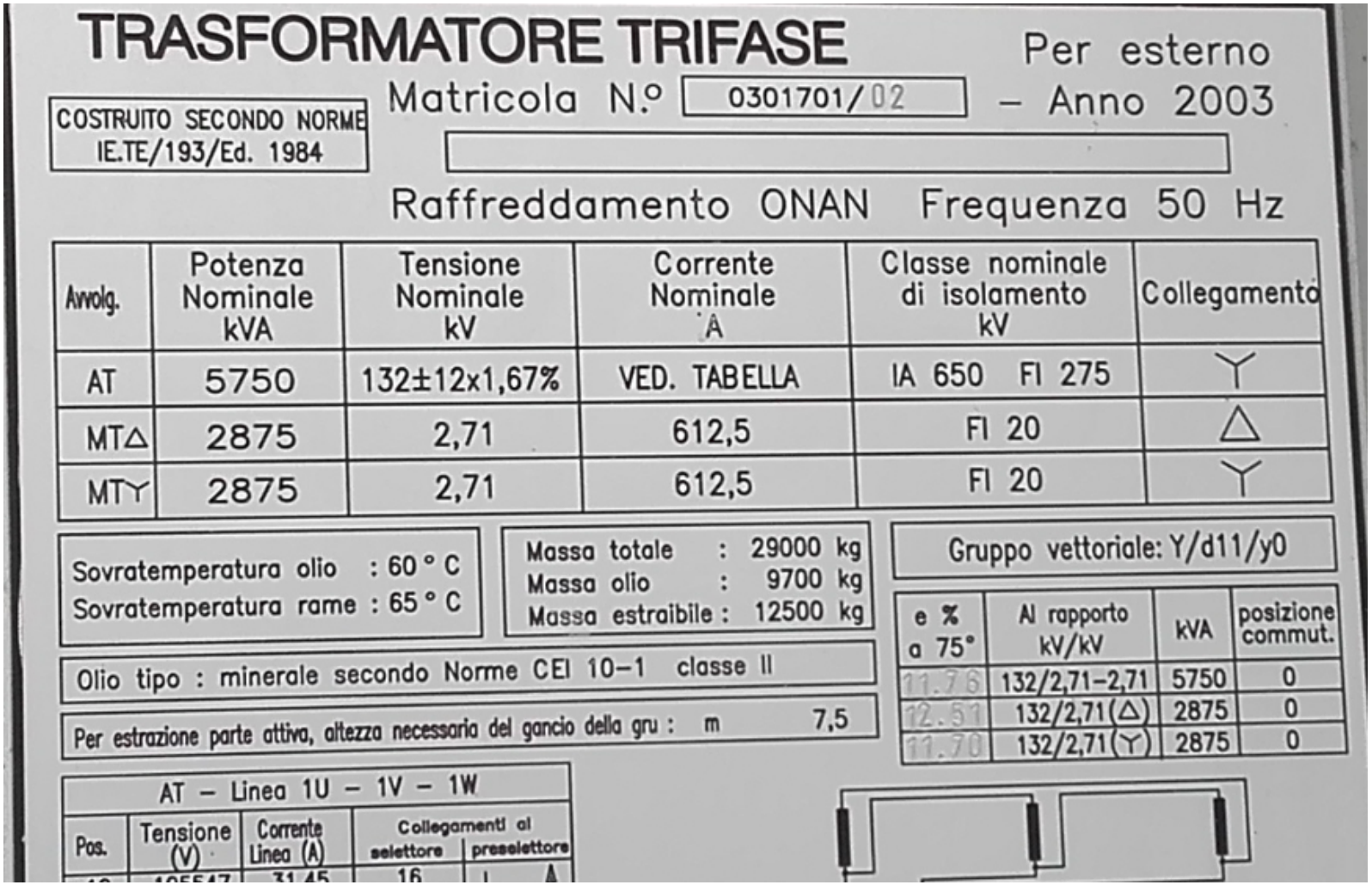
Dal grafico $V = f(I)$ si deduce il valore della resistenza interna della SSE per i valori di I che possono interessare un guasto alla linea di contatto.



Diagr. 1 – Ponte esafase. Caratteristica esterna. (Tensione raddrizzata in funzione della corrente raddrizzata) – Induttanza di carico costante 5,4 mH-Filtro assente.

Si possono utilizzare moderni simulatori Atp-Emtp con ATPDraw per la costruzione della curva Tensione-Corrente del complesso SSE (V_0 , R_{SSE}), e Spice (LTspice) per le elaborazioni successive.

trasformatore di SSE



TRASFORMATORE TRIFASE — Per esterno

COSTRUITO SECONDO NORME IE.TE/193/Ed. 1984

Matricola N.° 0301701/02 – Anno 2003

Raffreddamento ONAN Frequenza 50 Hz

Avvolg.	Potenza Nominale kVA	Tensione Nominale kV	Corrente Nominale A	Classe nominale di isolamento kV	Collegamento
AT	5750	132±12x1,67%	VED. TABELLA	IA 650 FI 275	Y
MT△	2875	2,71	612,5	FI 20	△
MTY	2875	2,71	612,5	FI 20	Y

Sovratemperatura olio : 60 ° C
Sovratemperatura rame : 65 ° C

Massa totale : 29000 kg
Massa olio : 9700 kg
Massa estraibile : 12500 kg

Gruppo vettoriale: Y/d11/y0

e % a 75°	Al rapporto kV/kV	kVA	posizione commut.
11.76	132/2,71–2,71	5750	0
12.51	132/2,71(△)	2875	0
11.70	132/2,71(Y)	2875	0

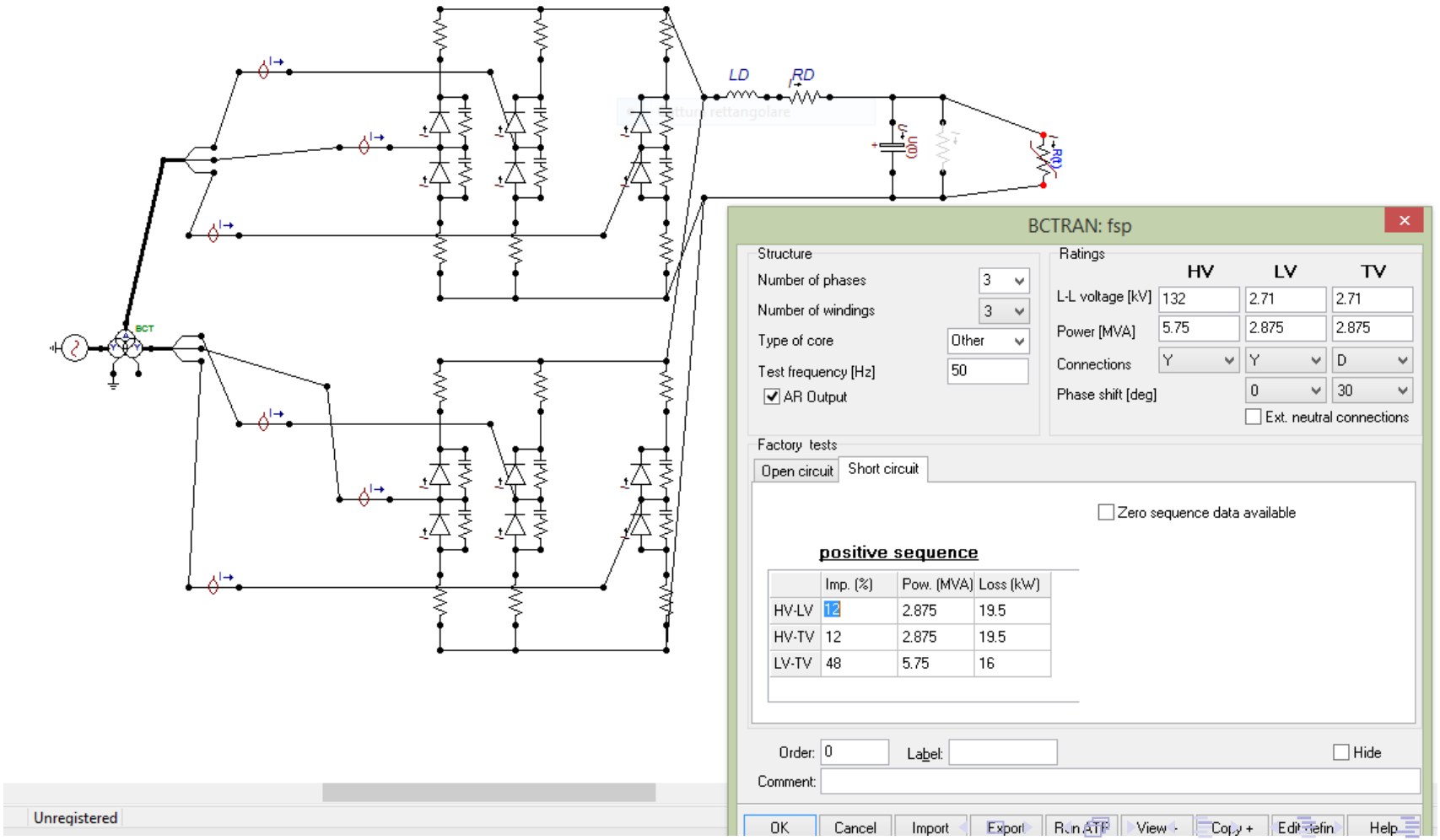
Olio tipo : minerale secondo Norme CEI 10–1 classe II

Per estrazione parte attiva, altezza necessaria del gancio della gru : m 7,5

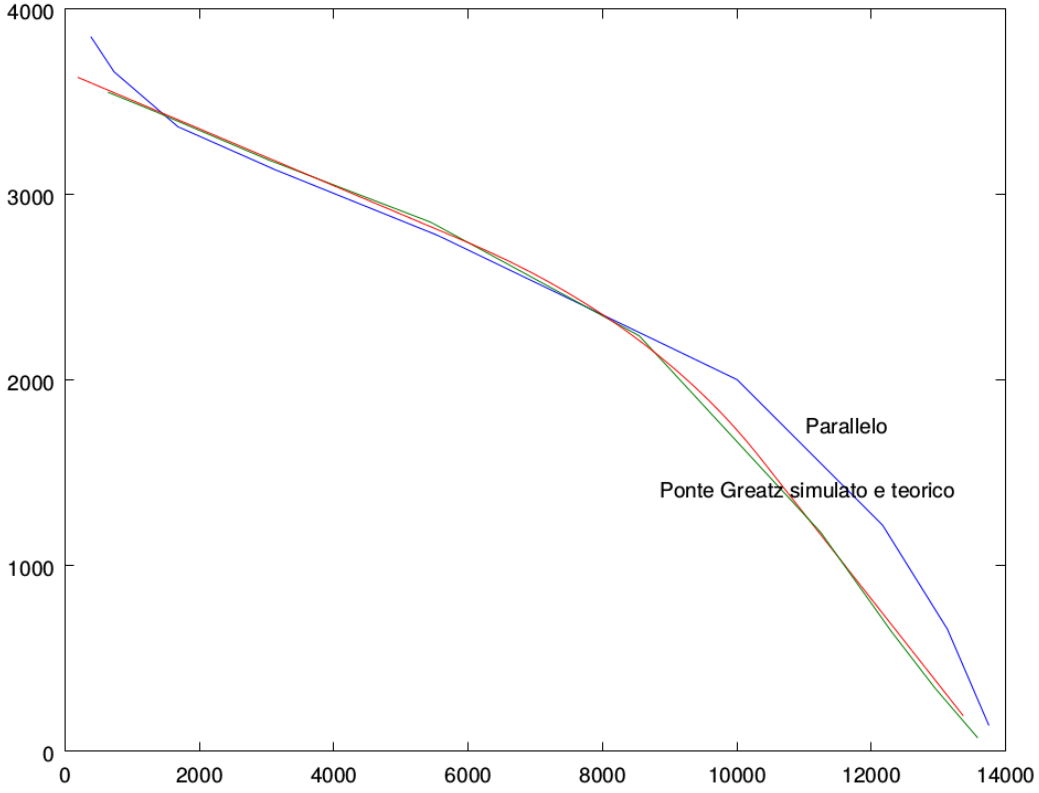
AT – Linea 1U – 1V – 1W

Pos.	Tensione (V)	Corrente Linea (A)	Collegamenti al selettore	Collegamenti al preselettore
16	105547	31.45	16	A

Schermata in ATPDraw per Atp-Emtp

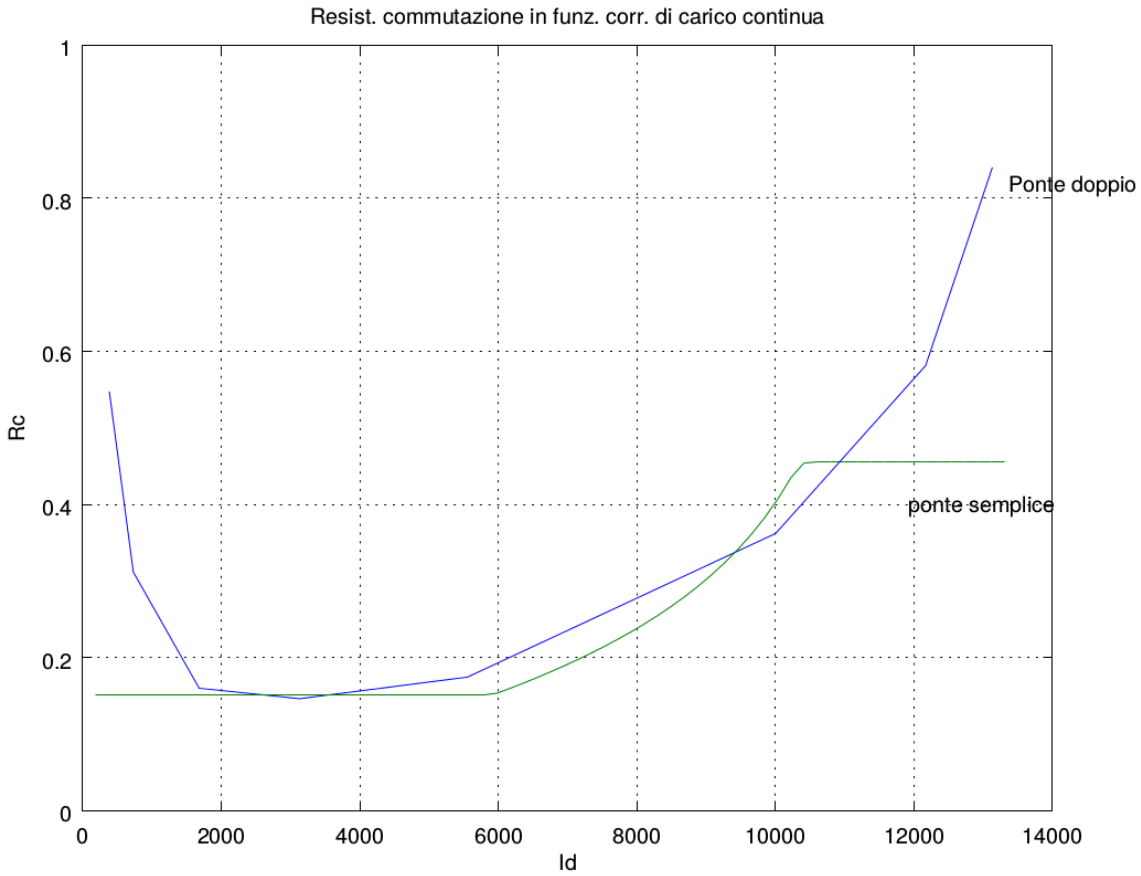


Curva V-I di SSE con Ponte a Diodi in parallelo



Nel ponte a diodi semplice è stata aumenta di circa 1,93 volte, la scala delle correnti.

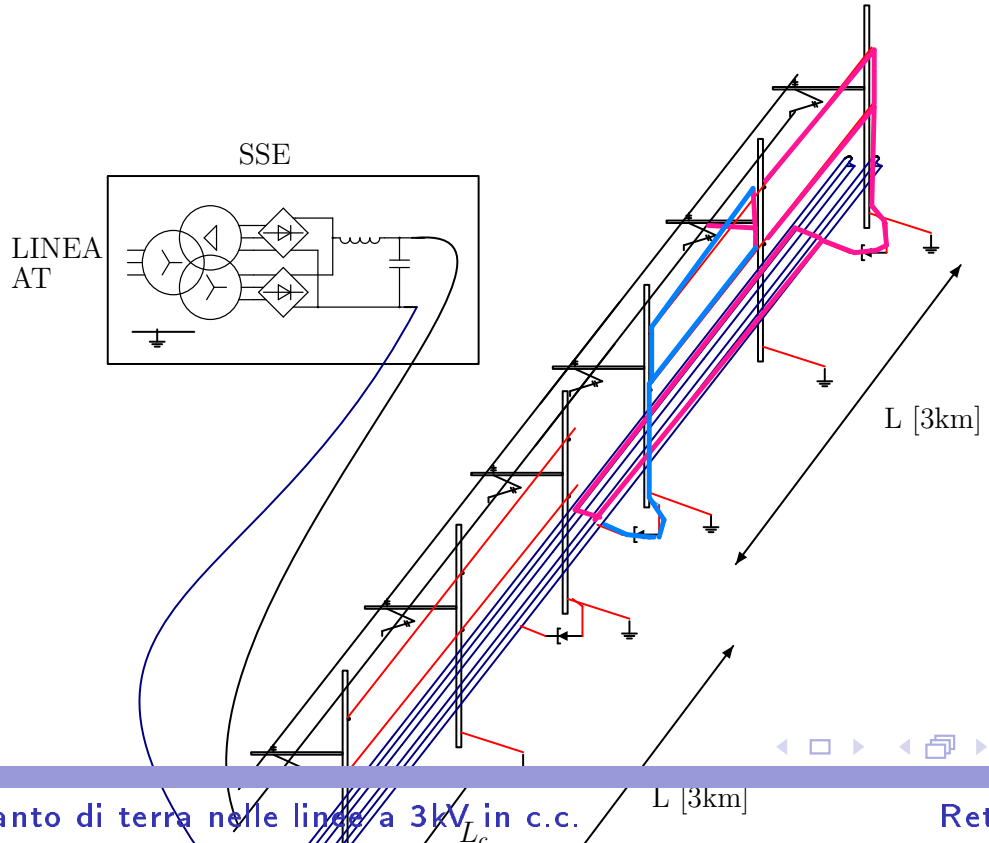
Curva V-I di SSE con Ponte a Diodi in parallelo



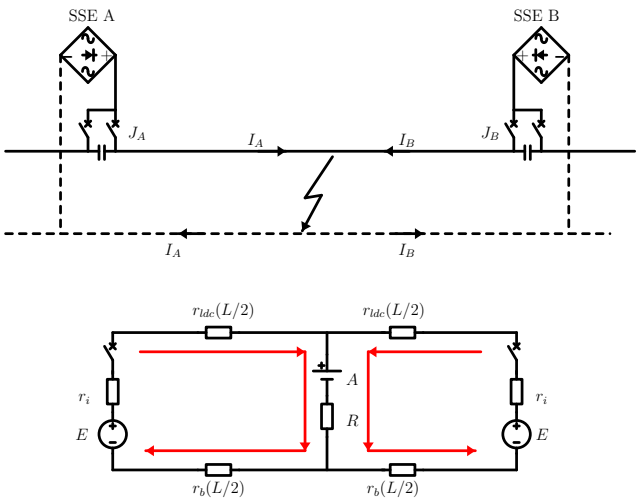
Per un esteso campo di corrente erogata abbiamo una resistenza equivalente interna di circa $R_{SSE} = 0,162\Omega$.

R resistenza di guasto - cedimento dell'isolamento supporto - palo TE

Il caso peggiore è rappresentato dal cedimento dell'isolamento a metà tratta del circuito di terra di protezione a $1,5km$.
Si può valutare tale resistenza di $R = 0.15\Omega$



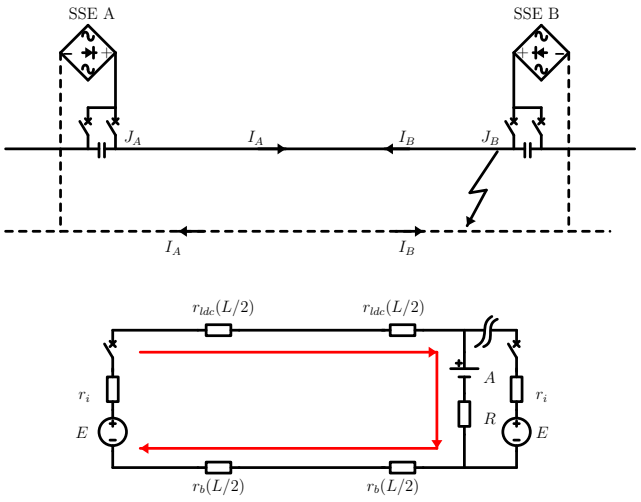
Metodi di protezione dal corto circuito di tipo amperometrico



Valutiamo il guasto a metà tratta

$$I_A = I_B = \frac{E - A}{(r_i + (r_{ldc} + r_b)L/2 + 2R)} \tag{1}$$

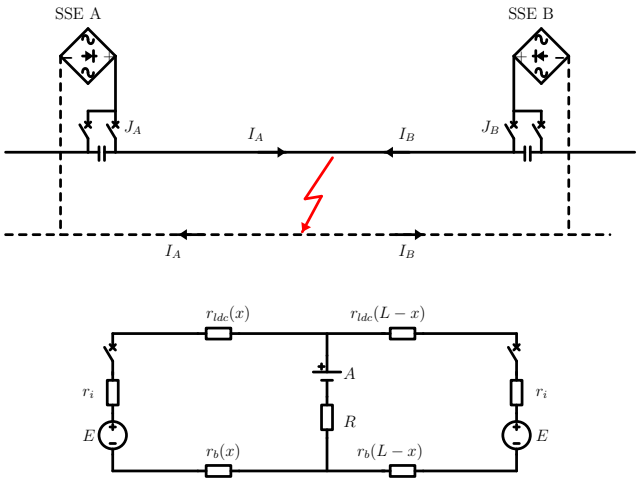
Metodi di protezione dal corto circuito di tipo amperometrico



valutiamo il guasto in corrispondenza di una SSE

$$I_A = I_B = \frac{E - A}{(r_i + (r_{ldc} + r_b)L + R)}$$

Metodi di protezione dal corto circuito di tipo amperometrico



La taratura scelta è dettata dalla presenza o no degli asservimenti, nella valutazione della corrente minore tra le due

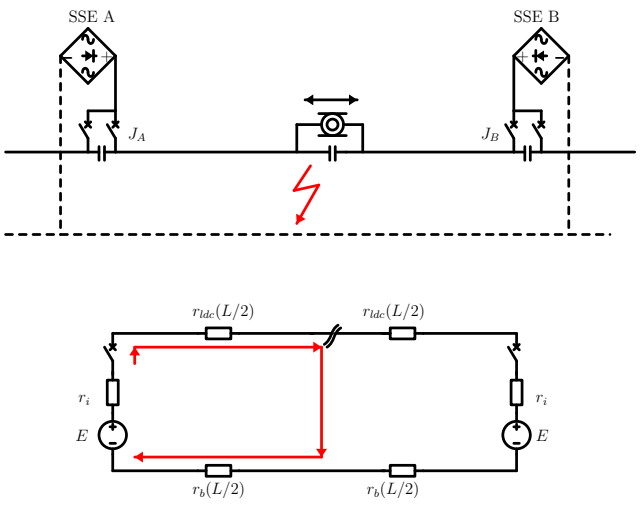
$$\frac{E-A}{(r_i+(r_{ldc}+r_b)L/2+2R)} <?> \frac{E-A}{(r_i+(r_{ldc}+r_b)L+R)}$$

Dal confronto si trova che per distanze tra SSE
$L > L_{min} = 2R/(r_{ldc} + r_b)$
la condizione di taratura minima è data dalla

$$I_A = I_B = \frac{E - A}{(r_i + (r_{ldc} + r_b)L + R)}$$

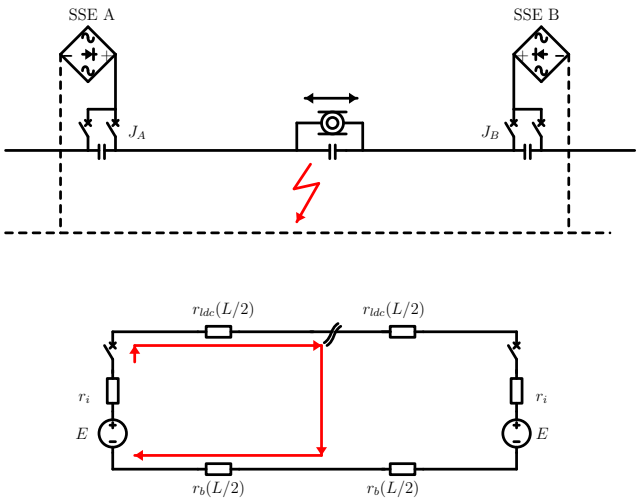
L_{min} sta tra i 4 ed i $7km$ con i valori tipici delle linee di trazione, mentre le distanze tra SSE (L) superano i $10km$

Il sezionatore amperometrico



Un metodo per aumentare la portata di corrente erogata è l'inserimento di un sezionatore amperometrico a metà tratta.

Il sezionatore amperometrico

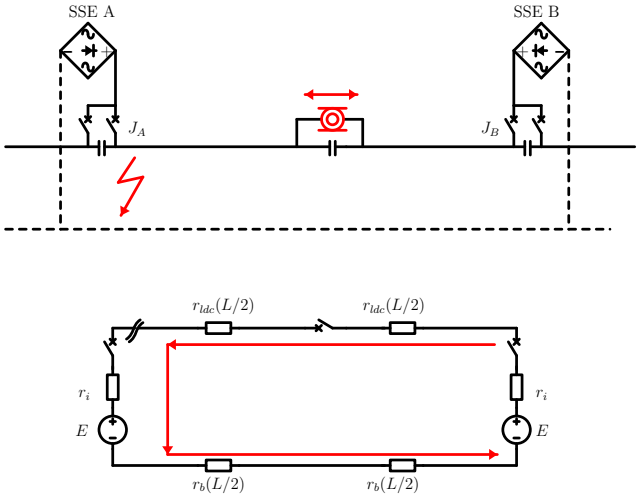


In tal caso l'extrarapido J_A è tarato con

$$I_A = \frac{E - A}{(r_i + (r_{ldc} + r_b)d_a + R)}$$

dove d_a distanza della SSE A dal sezionatore amperometrico,

Il sezionatore amperometrico

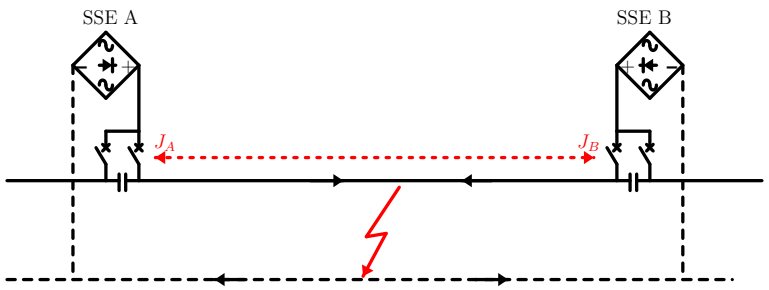


mentre per il sezionatore amperometrico si ha:

$$I = \frac{E - A}{(r_i + (r_{ldc} + r_b)L + R)}$$

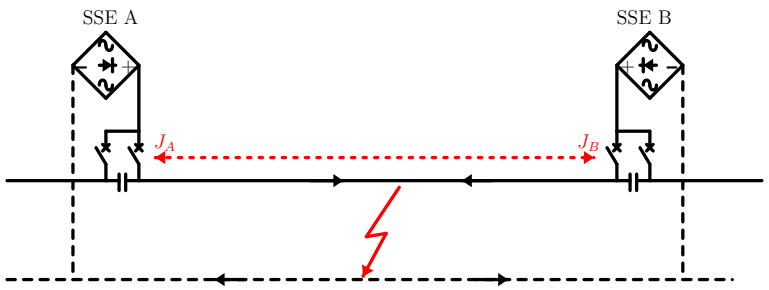
in quanto fa riferimento all'alimentazione a monte, ovvero alla SSE B

Asservimento tra extrarapidi



Per aumentare ulteriormente le portate si ricorre all'asservimento tra extrarapidi.
In pratica quando uno apre fa aprire anche l'altro, la comunicazione avviene su un circuito dedicato.

Asservimento tra extrarapidi

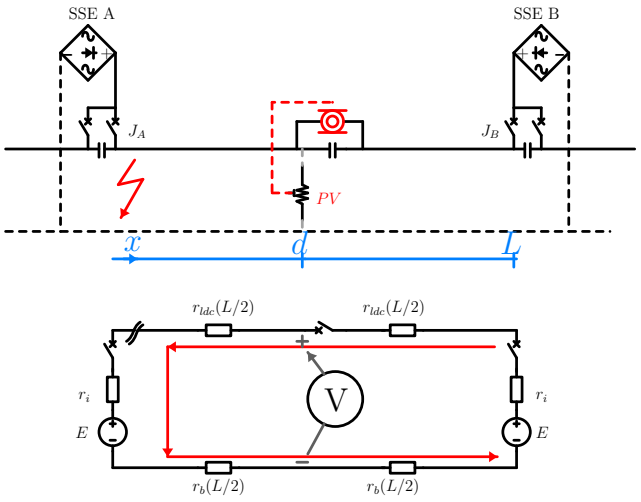


Per aumentare ulteriormente le portate si ricorre all'asservimento tra extrarapidi.
In pratica quando uno apre fa aprire anche l'altro, la comunicazione avviene su un circuito dedicato. In questa logica la taratura può essere aumentata fino al caso (1)

$$I_A = I_B = \frac{E - A}{(r_i + (r_{ldc} + r_b)L/2 + 2R)}$$

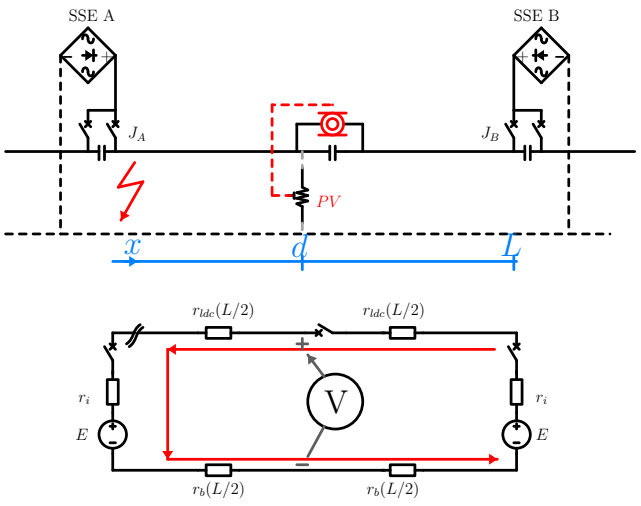
Sezionamento con relè voltmetrico

Un altro metodo usato un tempo utilizzava un sezionatore controllato da un relè con presa voltmetrica



Sezionamento con relè voltmetrico

Un altro metodo usato un tempo utilizzava un sezionatore controllato da un relè con presa voltmetrica

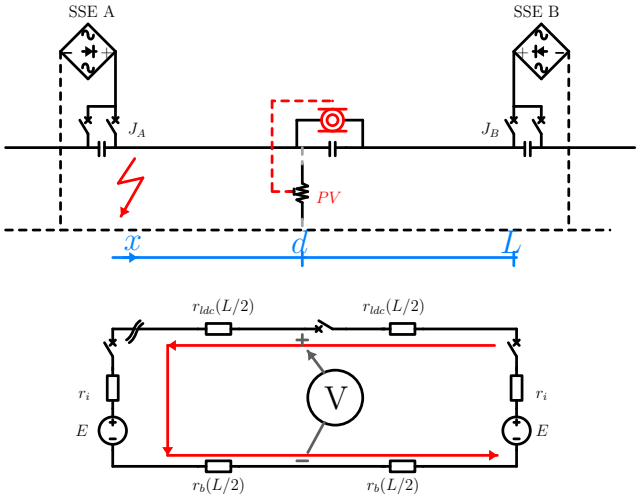


In tal caso la taratura dell'extrarapido J_A diventa:

$$I_A = \frac{E - A}{(r_i + (r_{ldc} + r_b)d_a + R)}$$

Sezionamento con relè voltmetrico

Un altro metodo usato un tempo utilizzava un sezionatore controllato da un relè con presa voltmetrica

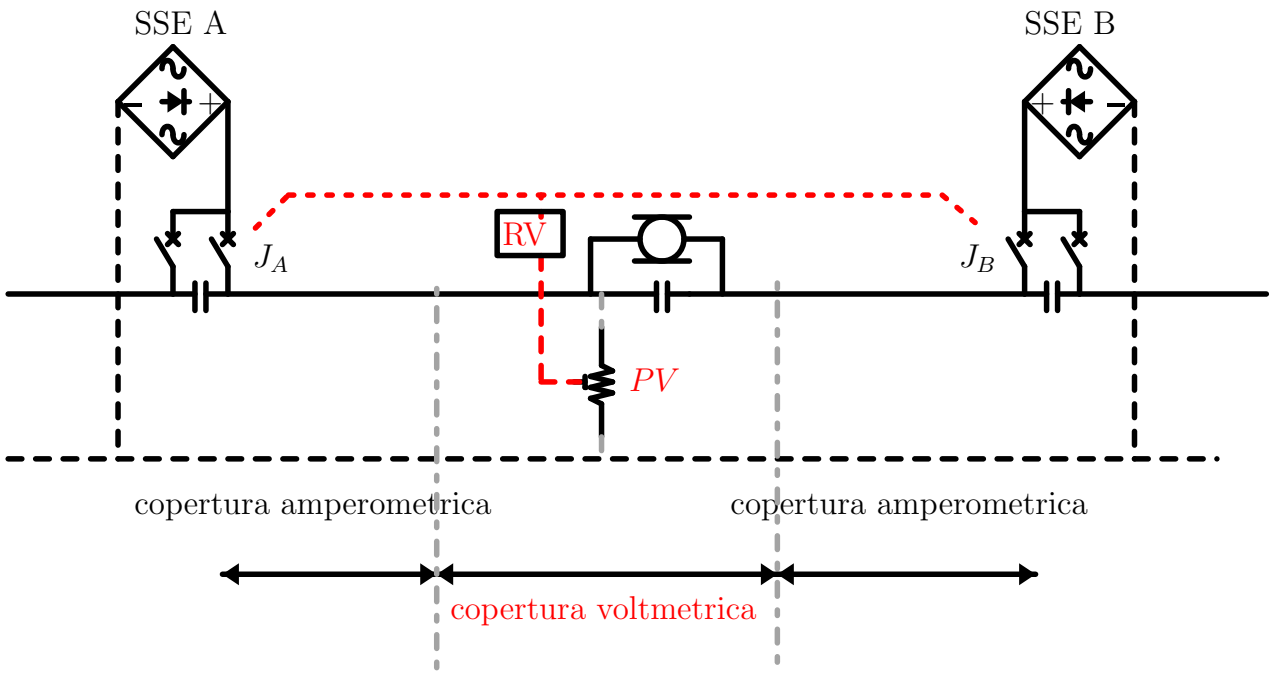


mentre il sezionatore intermedio comandato dal Relè Voltmetrico apre con tensione in linea inferiore a

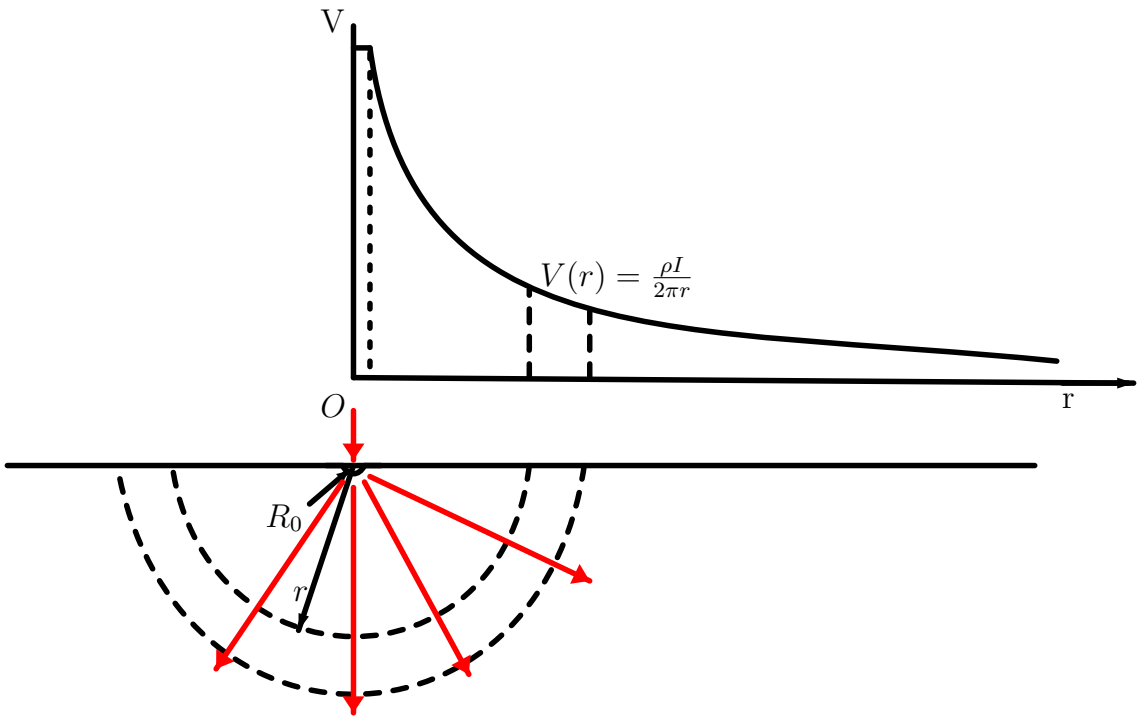
$$V = \frac{(E - A)(R + (r_{ldc} + r_b)d_a)}{(r_i + R + (r_{ldc} + r_b)L)} + A$$

L'ASDE

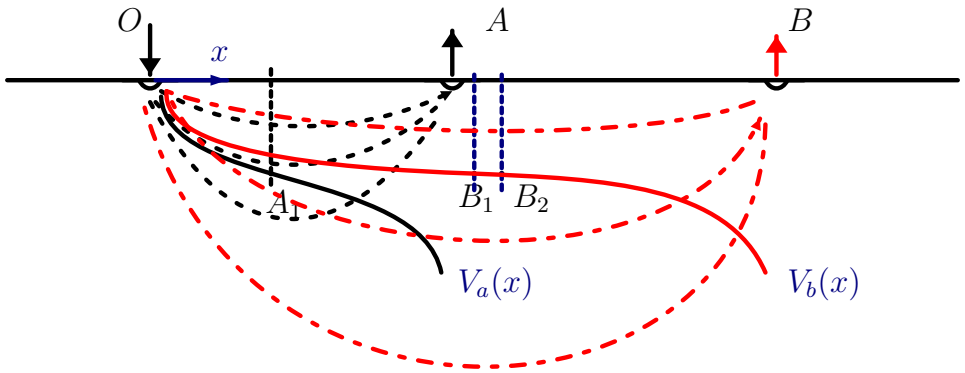
Ora si sfrutta una combinazione data da relè e prese voltmetriche, combinato con il circuito di asservimento a formare un sistema chiamato ASDE 2 (Asservimento a diseccitazione versione 2)



Il dispersore emisferico

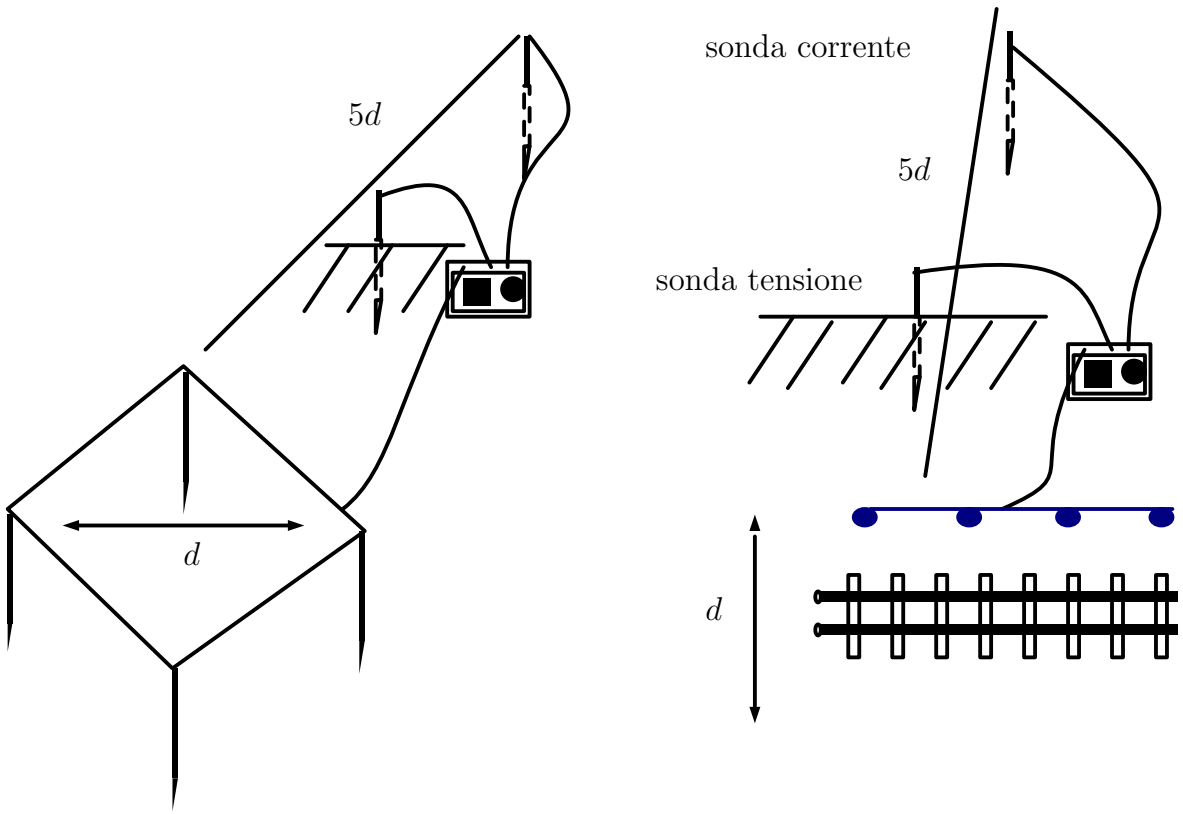


Il circuito per la misura della resistenza di terra



Quando il potenziale nella zona tra B_1 e B_2 è costante, esso assume il potenziale di riferimento della terra lontana.

Il circuito per la misura della resistenza di terra

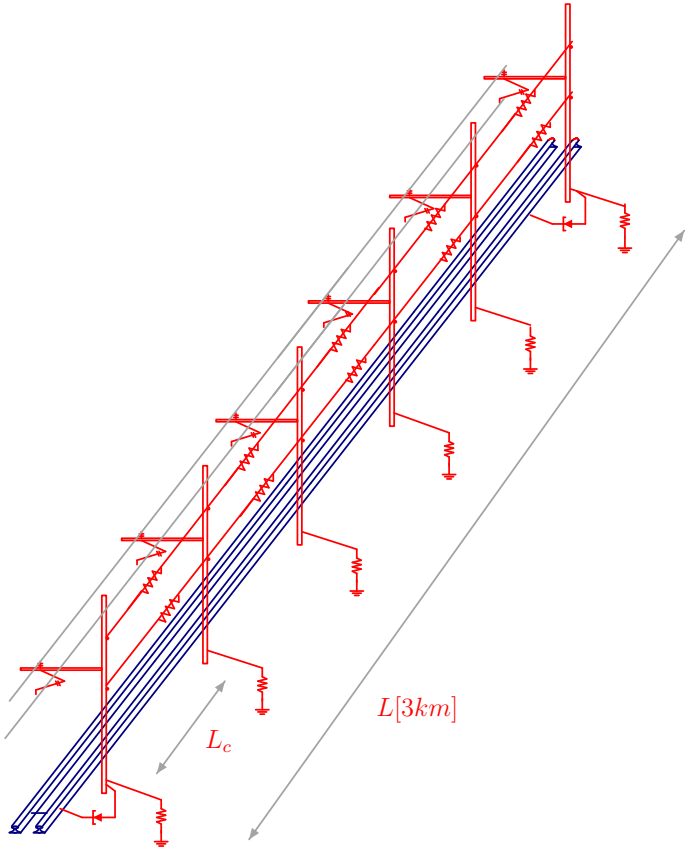


Strumenti utilizzati per le misure in continua:

- Due Batterie da 12 Vcc
- Uno/Due Multimetri per misure di tensione e corrente

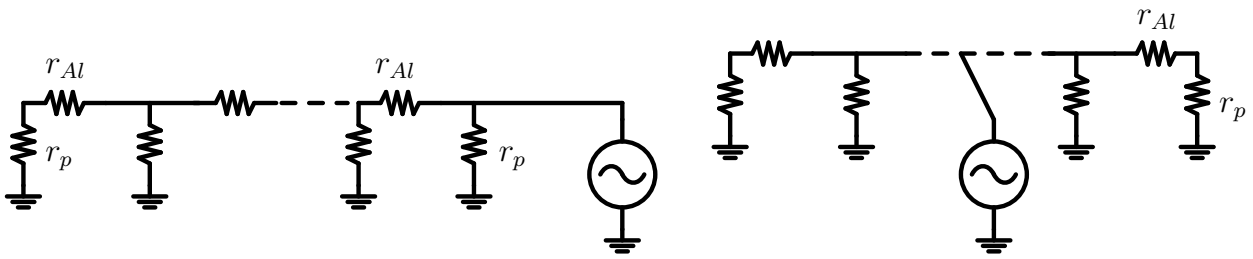
per i test ci si è concentrati in tratti di linea senza PL, RTB ecc, capaci di iniettare disturbi a $50Hz$.

La determinazione della resistenza di Terra del circuito di protezione TE



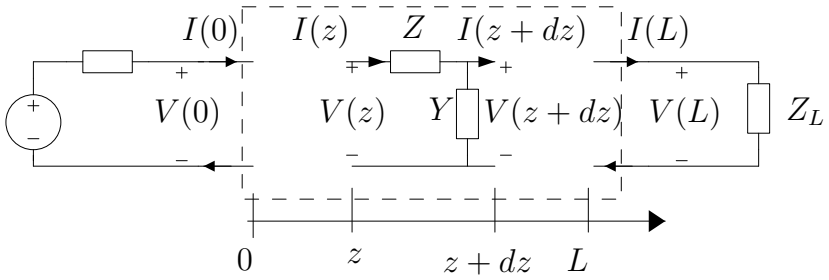
La determinazione della resistenza di Terra, del circuito di protezione TE

Il modello circuitale è quello di una rete resistiva in cascata: nei $3km$ abbiamo 50 celle elementari, ottenute da campate di $60m$.



che pensiamo tutte uguali.[10]

Possiamo provare ad applicare al sistema discreto, la teoria valida per il sistema continuo. Il modello continuo utilizzato è quello delle linee di trasmissione con perdite



Partendo dalle equazioni differenziali

$$\frac{d}{dz}V(z) = -(r + j\omega l)I(z) \tag{1a}$$

$$\frac{d}{dz}I(z) = -(g + j\omega c)V(z) \tag{1b}$$

inserendo la seconda dopo aver differenziato in z la prima, e ...
dopo vari passaggi, si ottiene una soluzione del tipo:

$$V(z) = V^{+}e^{-\gamma z} + V^{-}e^{\gamma z} \tag{2a}$$

$$I(z) = \frac{V^{+}}{Z_c}e^{-\gamma z} - \frac{V^{-}}{Z_c}e^{\gamma z} \tag{2b}$$

I due termini V^{+} e V^{-} rappresentano due onde di tensione, che vengono, a seconda del verso di propagazione, rispettivamente chiamate onda progressiva (z crescenti costante di propagazione $-\gamma$) e onda regressiva (z decrescenti costante di propagazione γ). Il cui valore dipende dalle condizioni al contorno (carico e generatore).

Le precedenti ci permettono di definire l'impedenza della linea in un qualsiasi punto z, come $Z(z) = V(z)/I(z)$, sapendo che a fine linea c'è il carico Z_L, si ottiene, in particolare dopo vari passaggi la

$$Z(0) = Z_c \frac{Z_L \cosh(\gamma L) + Z_c \sinh(\gamma L)}{Z_L \sinh(\gamma L) + Z_c \cosh(\gamma L)} \tag{3}$$

nelle misure di terra la $Z(0) = Z_t$ impedenza di terra della linea misurata ad inizio tratta.

Quando abbiamo a che fare con la corrente continua o quando le resistenze e conduttanze per unità di lunghezza prevalgono, come nel caso ($\omega = 0$), avremo

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} = \sqrt{rg} \tag{4}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{(r + j\omega l)}{(g + j\omega c)}} = \sqrt{\frac{r}{g}} \tag{5}$$

Naturalmente nel circuito di protezione, l'approssimazione fondamentale è di rapportare lo schema discreto allo schema continuo. Con ciò si pone

$$g = \frac{1}{R_p\, L_c} \tag{6}$$

dove R_p è la resistenza del picchetto di terra, ed L_c è la lunghezza della campata, la r è la resistenza della corda dall'alluminio.

Applicando la 3 al nostro caso, dovremo sostituire $Z_L = \infty$ ottenendo una impedenza o resistenza di terra

$$R_t(L) = Z(0, \omega = 0) = Z_c \frac{1}{\tanh(\gamma L)} \tag{7}$$

mentre al caso di misura a metà tratta dovremo calcolare la R_t come il parallelo di due resistenze del tipo $R_t(L/2)$ così da avere

$$R_t = \frac{Z_c}{2} \frac{1}{\tanh(\gamma L/2)} \tag{8}$$

Si osservi che, se γL è piccolo, si può sostituire la funzione $\tanh(\cdot)$ con il suo argomento così che le due resistenza assumeranno valori molto vicini.
Infatti,

$$R_t(L) = Z_c \frac{1}{\tanh(\gamma L)} = \frac{Z_c}{\gamma L} \tag{9}$$

$$R_t = \frac{Z_c}{2} \frac{1}{\tanh(\gamma L/2)} = \frac{Z_c/2}{(\gamma L/2)} \tag{10}$$

Ciò in accordo con i riscontri ottenuti nelle usuali misure sul campo.[36]

Tensione totale di terra

Le Ferrovie prescrivono per il **cdp** attualmente una R_t di 2Ω, con l'evolversi delle norme CEI, in circolari successive fu introdotto il rispetto delle tensioni di passo e contatto. E' opportuno perciò non limitarci alla determinazione della resistenza di terra. Infatti, quando il circuito di protezione è percorso dalla corrente, le masse e quindi le parti metalliche sono in tensione.
Le norme CEI generalmente in tal caso ammettono due vie:

- Garantire una tensione totale di terra inferiore alla Tensione di contatto ammissibile già in fase di progetto.
- Verificare rapportandosi alle condizioni di guasto, che le tensioni alle parti metalliche non superino il valore della Tensione di contatto ammissibile.

Tensione di contatto ammissibile

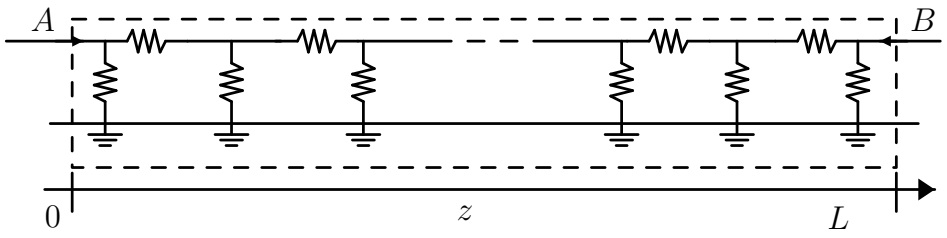
Nella tabella seguente si riporta la Tensione di contatto ammissibile, estratte dalla Norma CEI EN 50122-1 (CEI 9-6).

$t(s)$	in c.c (V)	in c.a. (V)	$t(s)$	in c.c (V)	in c.a. (V)
0.02	940	940	0.6	310	160
0.05	770	935	0.7	270	130
0.1	660	842	0.8	240	110
0.2	535	670	0.9	200	90
0.3	480	497	1	170	80
0.4	435	305	≤ 300	150	65
0.5	395	225	∞	120	50

(per il seguito prendiamo a riferimento la tensione a $0.2s$)

Il modello del doppio bipolo

Da ciò discende l'interesse ad approfondire lo studio della rete resistiva



con il modello del doppio bipolo.
Un bipolo molto particolare, con un terminale "comune" alle due porte, fisicamente non accessibile!

Il modello del doppio bipolo

Infatti partendo dalle di V(z) ed I(z) generiche, valutate in $z = 0$ e per $z = L$, si ottengono quattro equazione dipendenti dai parametri V^+ e V^-

$$V(A) = V^+ + V^- \tag{11}$$

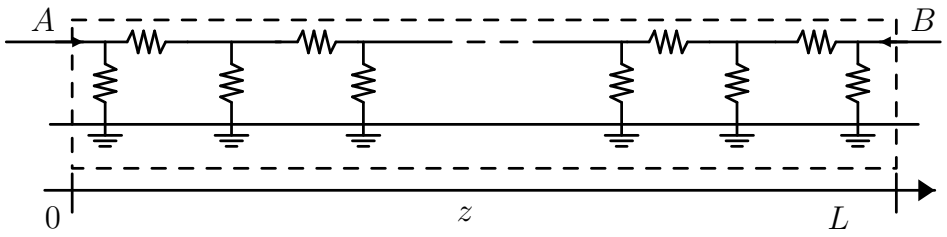
$$I(A) = \frac{V^+}{Z_c} - \frac{V^-}{Z_c} \tag{12}$$

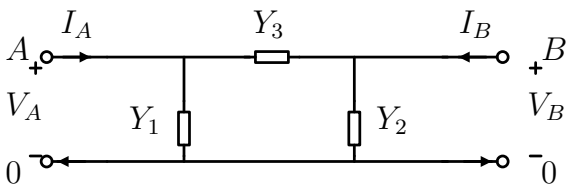
$$V(B) = V^+ e^{-\gamma L} + V^- e^{\gamma L} \tag{13}$$

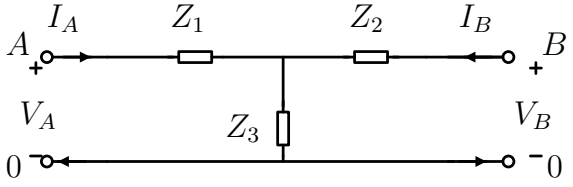
$$I(B) = \frac{V^+}{Z_c} e^{-\gamma L} - \frac{V^-}{Z_c} e^{\gamma L} \tag{14}$$

combinandole per eliminare la dipendenza da V^+ e V^-, si può ottenere l'equivalente doppio bipolo con schema a pi-greco oppure a T.

Il modello del doppio bipolo







Il modello del doppio bipolo

Dove

$$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{Z_c} \tanh(\gamma L/2) \tag{15a}$$

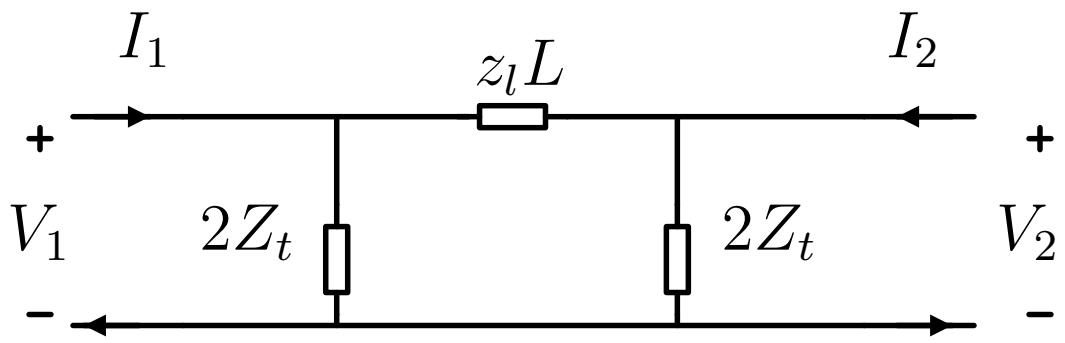
$$Y_3 = \frac{1}{Z_c} \frac{1}{\sinh(\gamma L)} \tag{15b}$$

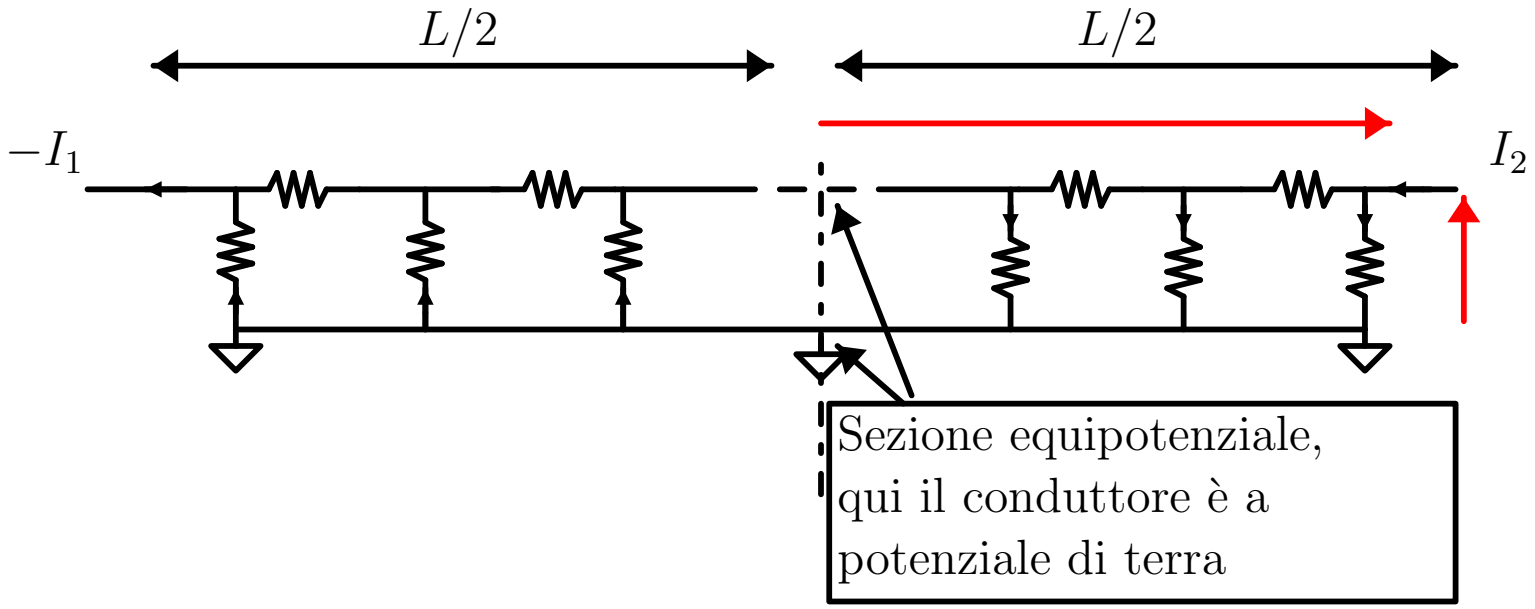
$$Z_1 = Z_2 = Z_c \tanh(\gamma L/2) = z_l L \frac{\tanh(\gamma L/2)}{\gamma L} \tag{15c}$$

$$Z_3 = Z_c \frac{1}{\sinh(\gamma L)} \tag{15d}$$

Il modello del doppio bipolo

Nelle ipotesi di bassa dispersione ($\gamma L << 1$) il modello si semplifica, facendo apparire il parametro Resistenza di Terra (Z_t) visto in precedenza





In rosso la tensione totale di terra del nodo 2

Analogia tra Circuito di protezione e Binario

Quanto visto per il trefolo a maggior ragione lo si può applicare al binario (traversine ogni 60 cm) ed ipotesi di dispersione omogenea. Dobbiamo risalire all'unico elemento non noto:

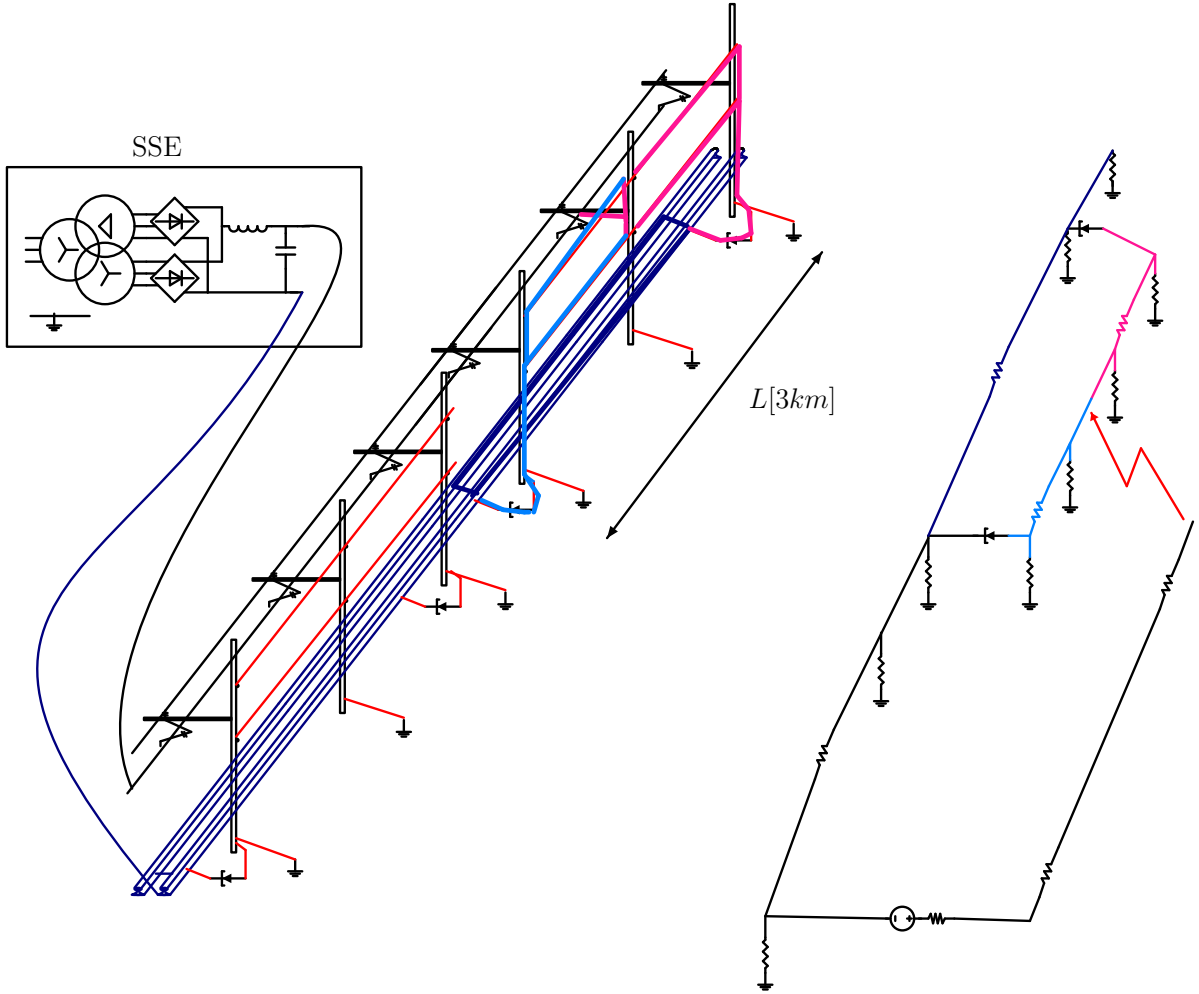
- la conduttanza di dispersione del binario.

Per esempio attraverso misure di resistenza di terra su binario di lunghezza nota.

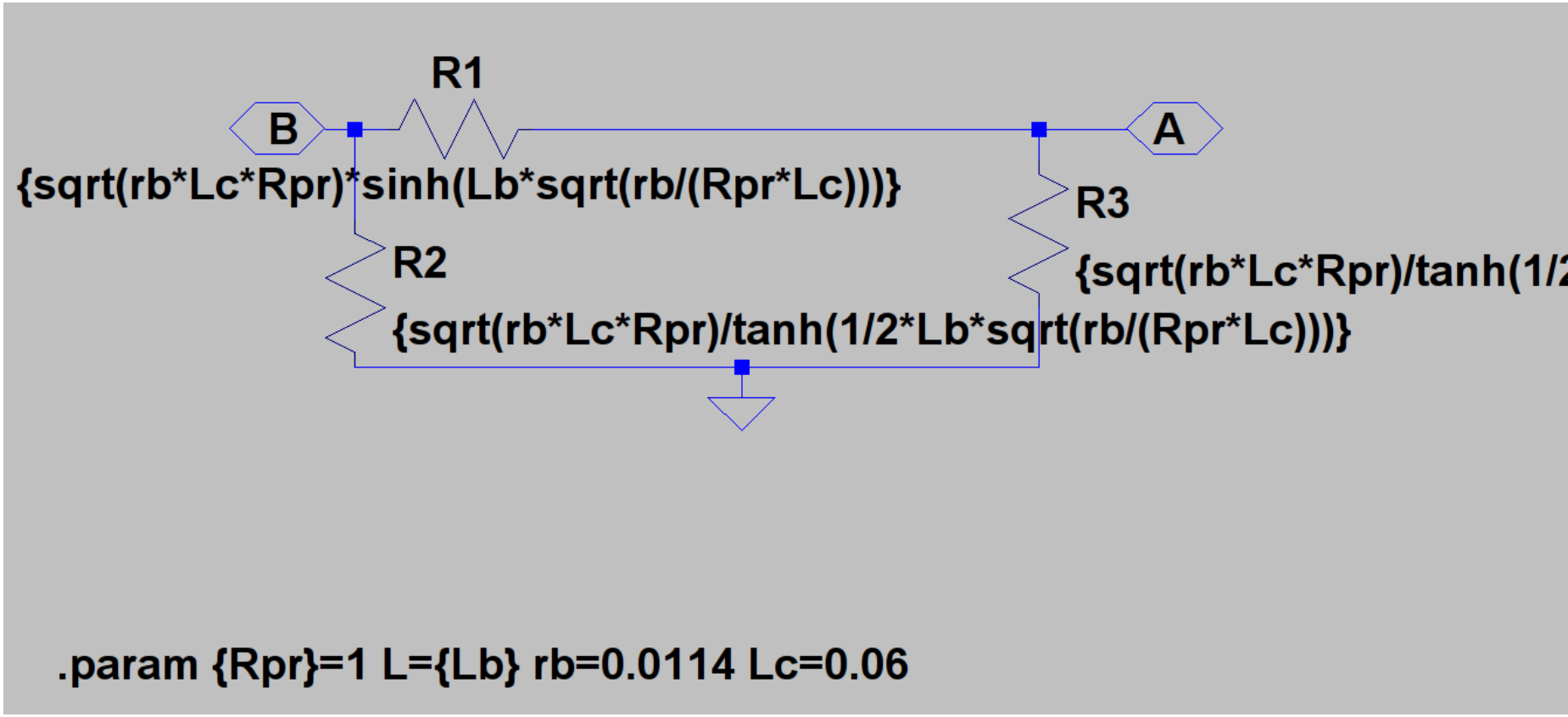
$$R_t(L) = Z_c \frac{1}{\tanh(\gamma L)} \simeq \frac{Z_c}{\gamma L} = \frac{1}{gL} \tag{16}$$

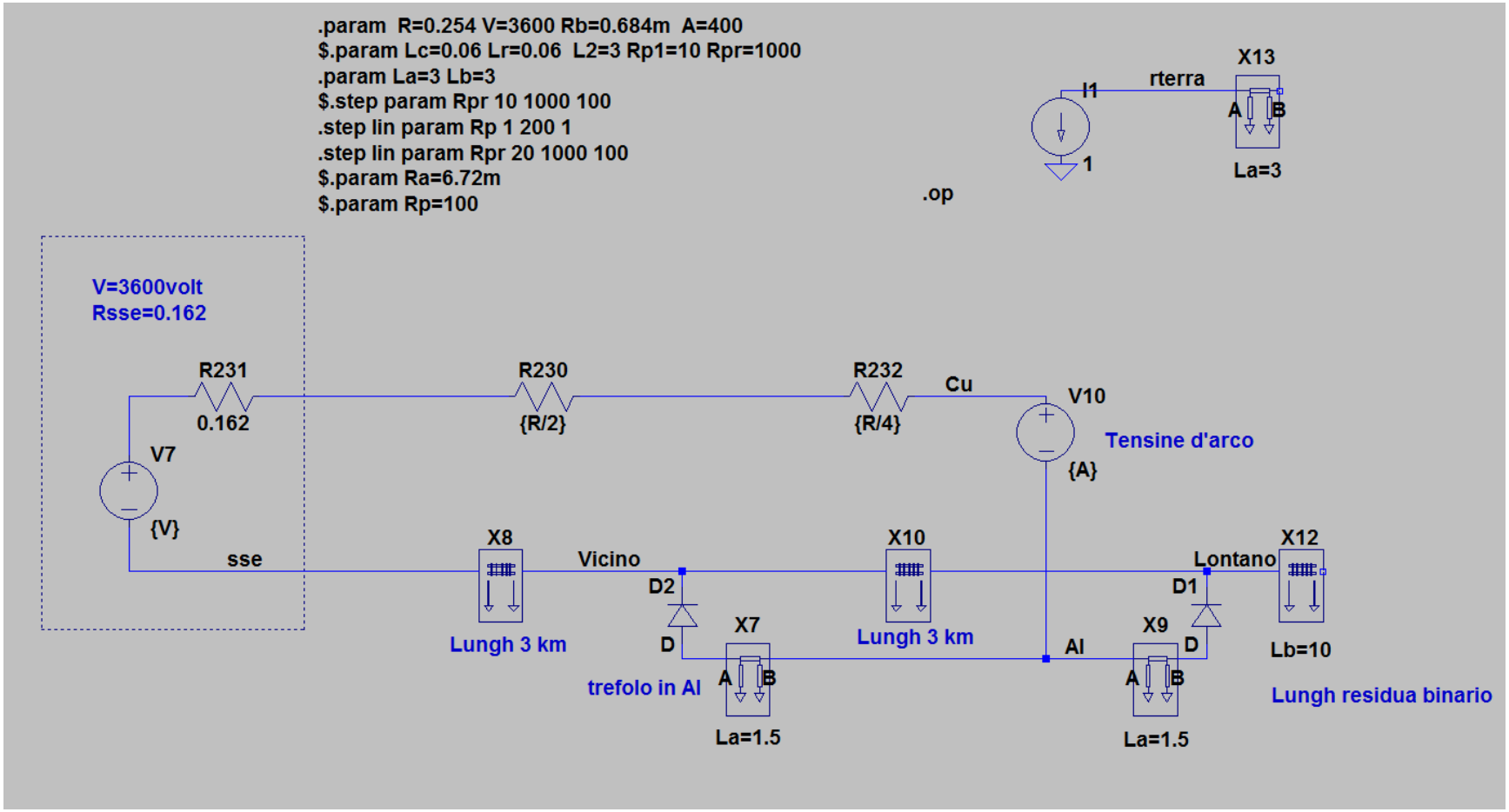
dove le ultime due espressioni approssimano il caso $\gamma L << 1$. Inoltre, se facciamo circolare la corrente di guasto al circuito, siamo in grado di risalire alla tensione totale di Terra in vari punti.

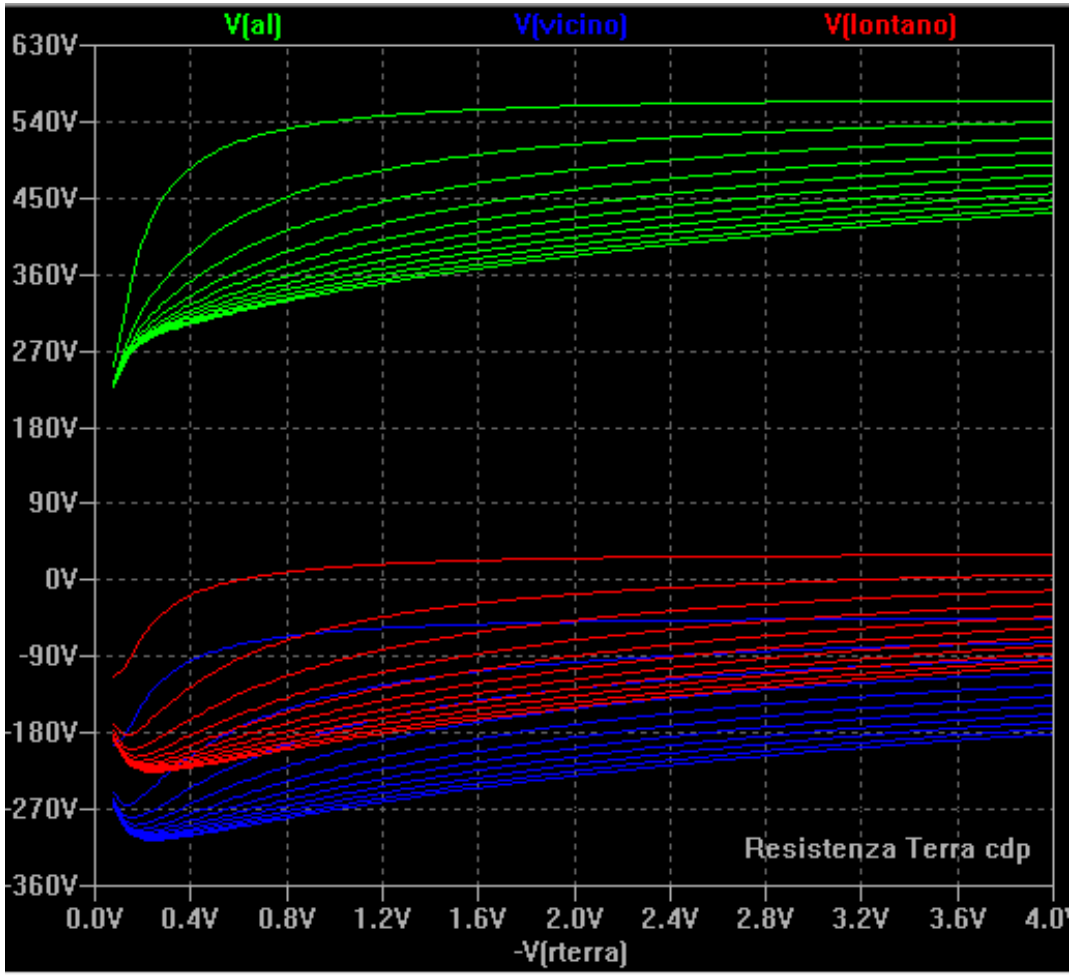
Schema equivalente con linea guasta



Il modello π in LTspice

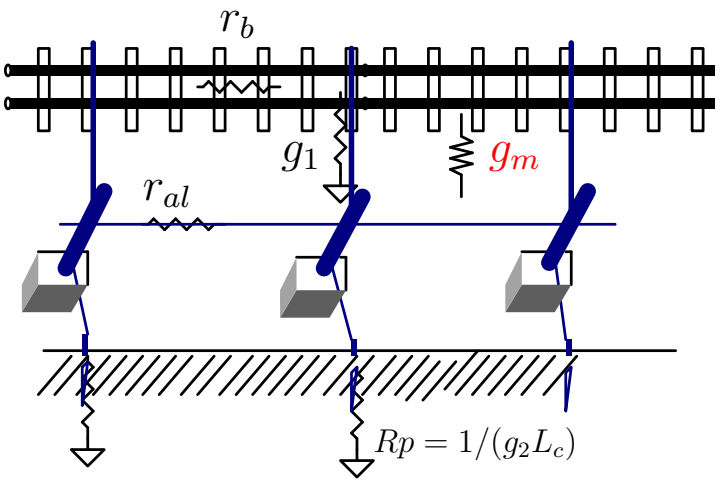


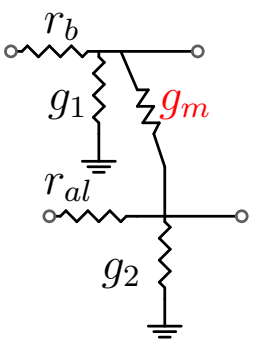

.param R=0.254 V=3600 Rb=0.684m A=400
$.param Lc=0.06 Lr=0.06 L2=3 Rp1=10 Rpr=1000
.param La=3 Lb=3
$.step param Rpr 10 1000 100
.step lin param Rp 1 200 1
.step lin param Rpr 20 1000 100
$.param Ra=6.72m
$.param Rp=100
.op
I1
1
rterra
X13
A
B
La=3
V=3600volt
Rsse=0.162
R231
0.162
R230
{R/2}
R232
{R/4}
Cu
V10
{A}
Tensine d'arco
V7
{V}
sse
X8
Lungh 3 km
Vicino
D2
D
X7
trefolo in Al
La=1.5
X10
Lungh 3 km
Al
X9
La=1.5
Lontano
D1
X12
Lb=10
Lungh residua binario


V(al)
V(vicino)
V(lontano)
630V
540V
450V
360V
270V
180V
90V
0V
-90V
-180V
-270V
-360V
0.0V
0.4V
0.8V
1.2V
1.6V
2.0V
2.4V
2.8V
3.2V
3.6V
-V(rterra)
Resistenza Terra cdp

L'accoppiamento conduttivo

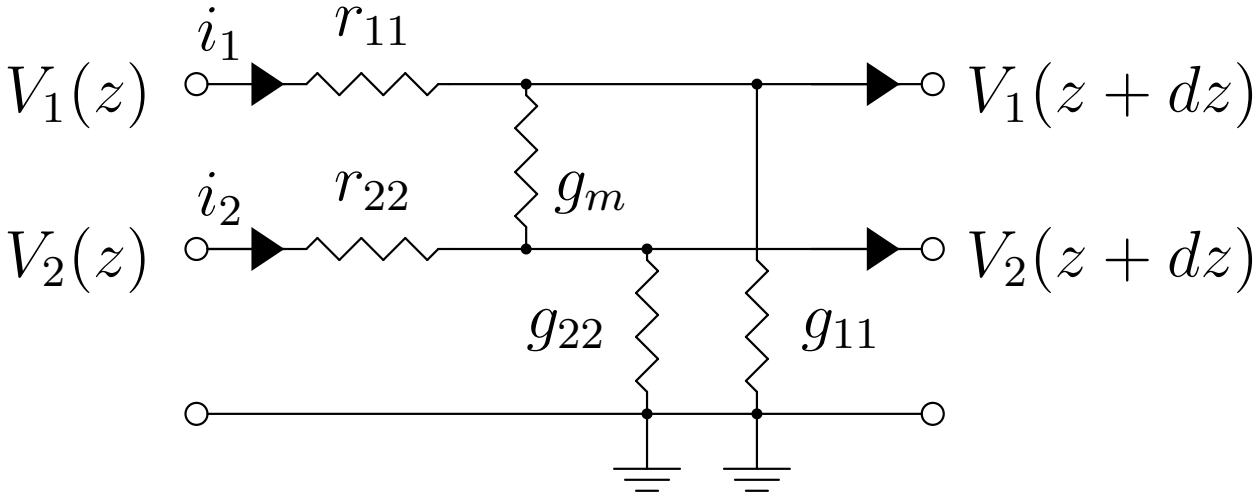
Un ulteriore approfondimento si può fare considerando il tratto di binario tra circuito di protezione percorso da corrente ed il binario accoppiati.





Si deve scomodare in tal caso la teoria delle linee a multi-conduttori

Eseguiamo l'ipotesi semplificativa come fatto in precedenza di trattare l'impianto di terra del circuito di protezione come linea distribuita. Analoga considerazione, a maggior ragione, verrà fatta per il binario. Ora però consideriamo le due linee accoppiate, attraverso una conduttanza di dispersione g_m.



L'analisi sarà pertanto rivolta ad un sistema a tre conduttori accoppiati (il conduttore di terra è comune). Dallo schema equivalente di figura otteniamo la seguente rappresentazione agli elementi finiti

$$\begin{pmatrix} \frac{di_1}{dz} \\ \frac{di_2}{dz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(g_{11}+g_m) & g_m \\ g_m & -(g_{22}+g_m) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

ed analogamente

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_1}{dz} \\ \frac{dv_2}{dz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{11} & 0 \\ 0 & -r_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

che definendo le matrici R e G:

$$G = \begin{bmatrix} (g_{11} + g_m) & -g_m \\ -g_m & (g_{22} + g_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & -g_m \\ -g_m & g_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\frac{dI}{dz} = -G\ V \tag{21a}$$

$$\frac{dV}{dz} = -R\ I \tag{21b}$$

Derivando l'equazione in z dalla seconda equazione in dV/dz e sostituendovi la prima equazione si ottiene, la seguente equazione differenziale di secondo grado.

$$\frac{d^2}{dz^2} V = RG\ V \tag{22}$$

$$RG = \begin{bmatrix} r_{11}(g_{11} + g_m) & -r_{11}\ g_m \\ -r_{22}\ g_m & r_{22}(g_{22} + g_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -d & c \end{bmatrix} \tag{23a}$$

La matrice RG non è diagonale in genere, pertanto gli elementi del vettore V, ovvero V_1 e V_2 risultano accoppiati. Una strategia, utilizzata, è di cercare una particolare combinazione sugli elementi di V, tale da dar luogo ad un nuovo vettore V_m detto modale, per il quale valga

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} V_m &= T_v^{-1}\ RG\ T_v\ V_m \\ &= \gamma^2\ V_m \end{aligned} \tag{24}$$

In cui γ^2 è una matrice diagonale, avente come elementi gli autovalori di RG, e dove T_v è la corrispondente matrice degli autovettori. Da V_m si può ottenere a ritroso $V = T_v\ V_m$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} I_m &= T_I^{-1}\ GR\ T_I\ I_m \\ &= \gamma^2\ I_m \end{aligned} \tag{25}$$

con T_I matrice degli autovettori di GR, ed I_m vettore modale delle correnti, vale in questo caso $I = T_I\ I_m$.
Le due matrici, RG ed GR hanno gli stessi autovalori, mentre per le matrici degli autovettori vale la seguente proprietà

$$T_v^t = T_I^{-1} \tag{26}$$

Le soluzioni nell'ambito del sistema modale, discendono da quelle di una singola linea di trasmissione, infatti le linee ora sono disaccoppiate. Agli elementi dei vettori I_m (oppure V_m), componenti I_{m1} (V_{m1}) ed I_{m2} (V_{m2}), sono associati rispettivamente le costanti di propagazione (attenuazione) $\pm\gamma_1$ e $\pm\gamma_2$.
Le soluzioni saranno in forma matriciale date da

$$V_m = e^{-\gamma z} V_m^+ + e^{\gamma z} V_m^- \tag{27}$$

oppure da

$$I_m = e^{-\gamma z} I_m^+ - e^{\gamma z} I_m^- \tag{28}$$

le matrici $e^{\pm\gamma z}$ hanno i soli elementi in diagonale, pari a $e^{\pm\gamma_1 z}$ ed $e^{\pm\gamma_2 z}$.

Partendo dalla 28, sostituendola nella 21a si può definire una matrice delle impedenze Z_c, con significato di impedenza caratteristica matriciale. La quale possiede inversa $Y_c = Z_c^{-1}$ chiamata ammettenza caratteristica. Si consulti [Paul] per ulteriori forme equivalenti alla 29.

$$Z_c = G^{-1}\ T_I\ \gamma T_I^{-1} \tag{29}$$

con la quale segue,

$$V(z) = Z_c T_I (e^{-\gamma z} I_m^+ + e^{\gamma z} I_m^-) \tag{30a}$$

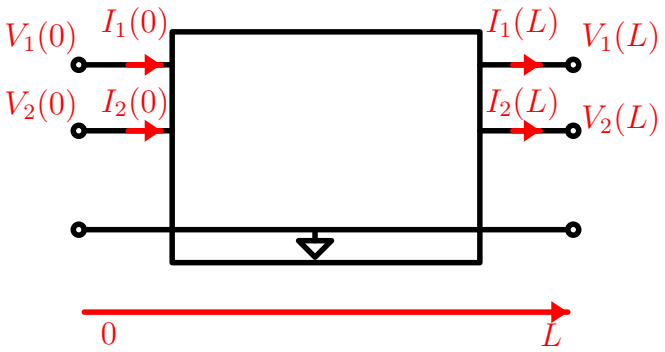
$$I(z) = T_I (e^{-\gamma z} I_m^+ - e^{\gamma z} I_m^-) \tag{30b}$$

Se ora consideriamo due linee affiancate e lunghe L possiamo calcolarci le 30 per $z = 0$ e per $z = L$

$$V(0) = Z_c T_I (I_m^+ + I_m^-) \tag{31a}$$
$$I(0) = T_I (I_m^+ - I_m^-) \tag{31b}$$

$$V(L) = Z_c T_I (e^{-\gamma L} I_m^+ + e^{\gamma L} I_m^-) \tag{32a}$$
$$I(L) = T_I (e^{-\gamma L} I_m^+ - e^{\gamma L} I_m^-) \tag{32b}$$

si può passare alla matrice delle ammettenze del n-polo, in cui dobbiamo considerare tutte le correnti entranti come fatto nel caso della linea di trasmissione semplice.

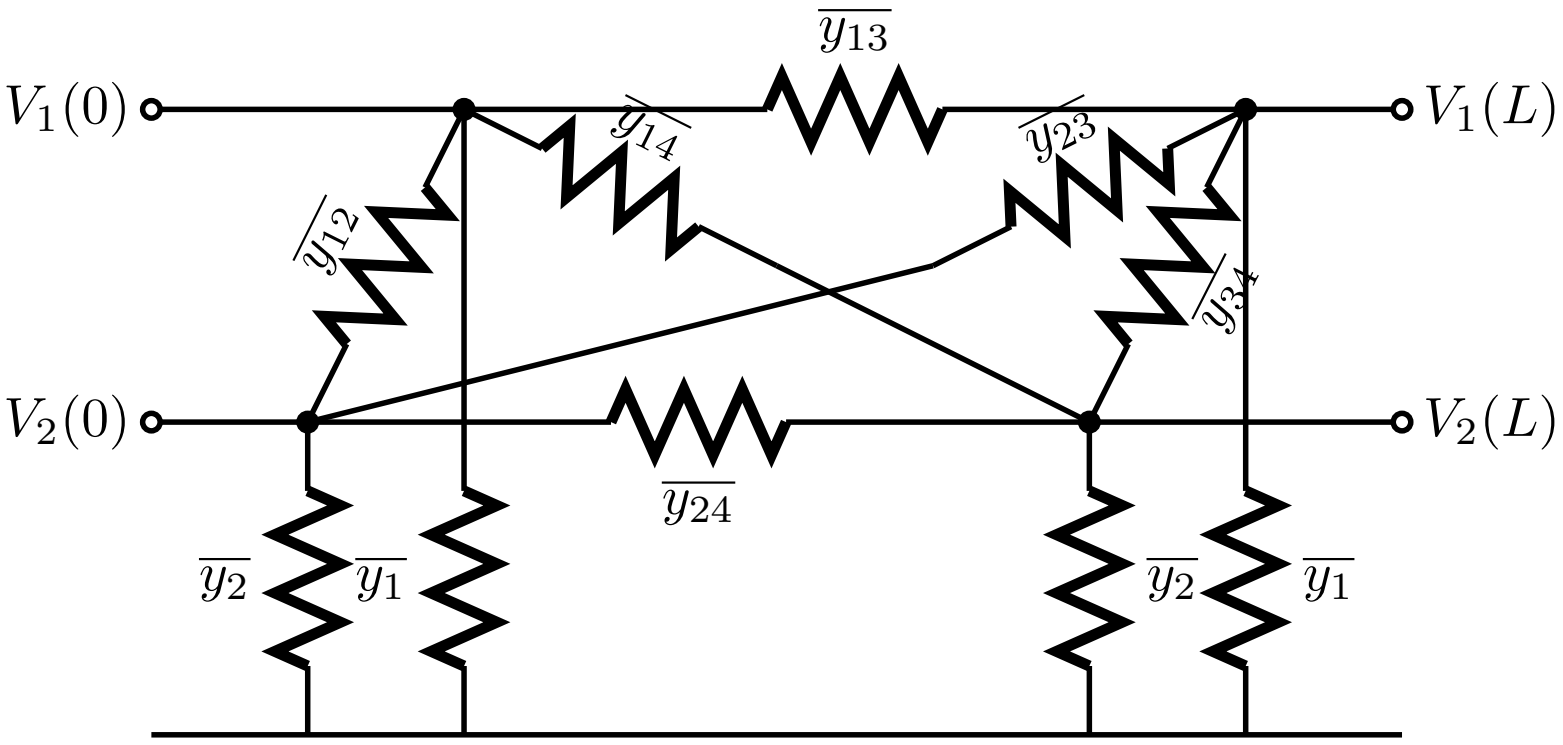


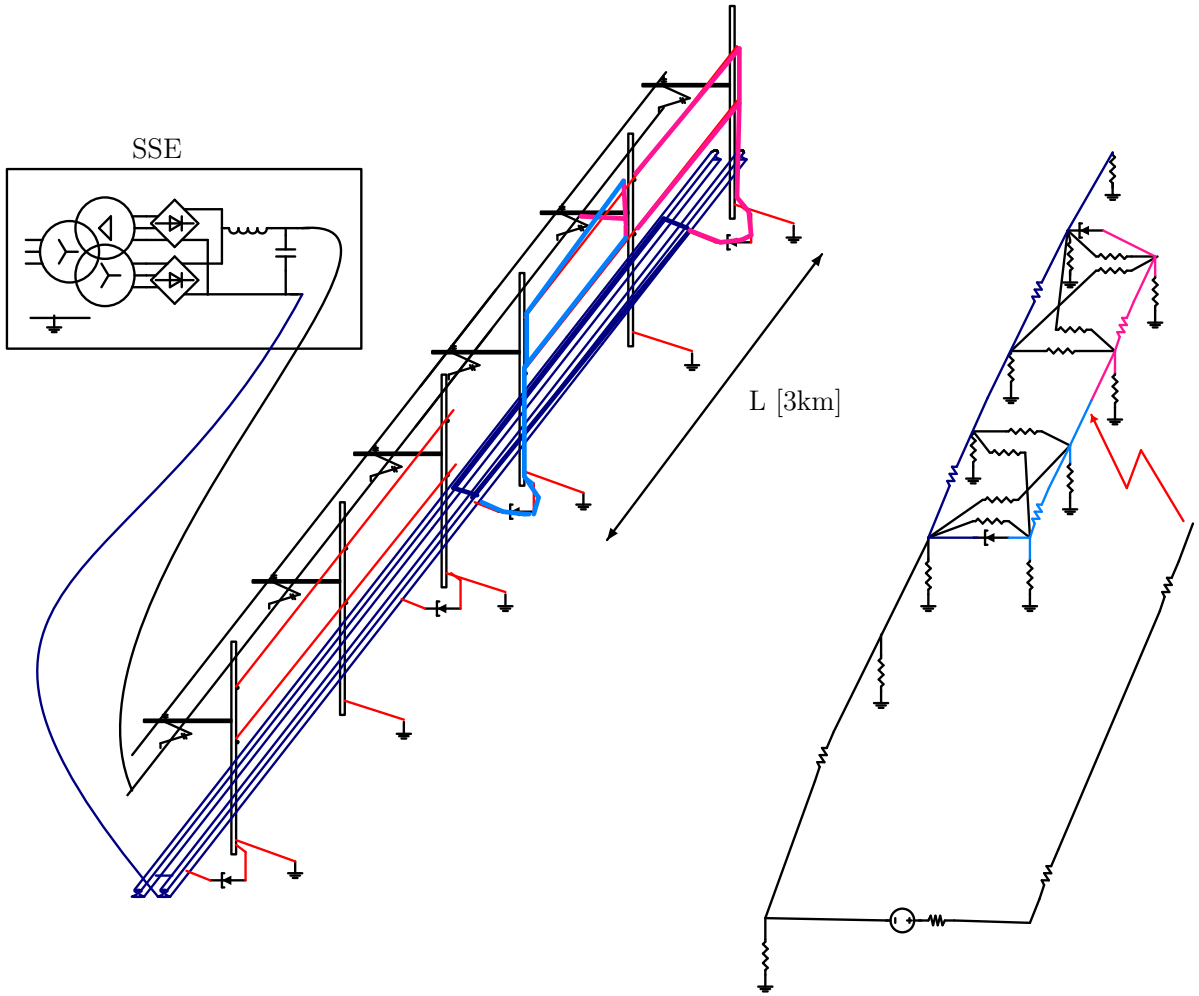
$$\begin{pmatrix} I(0) \\ -I(L) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V(0) \\ V(L) \end{pmatrix} \tag{33}$$

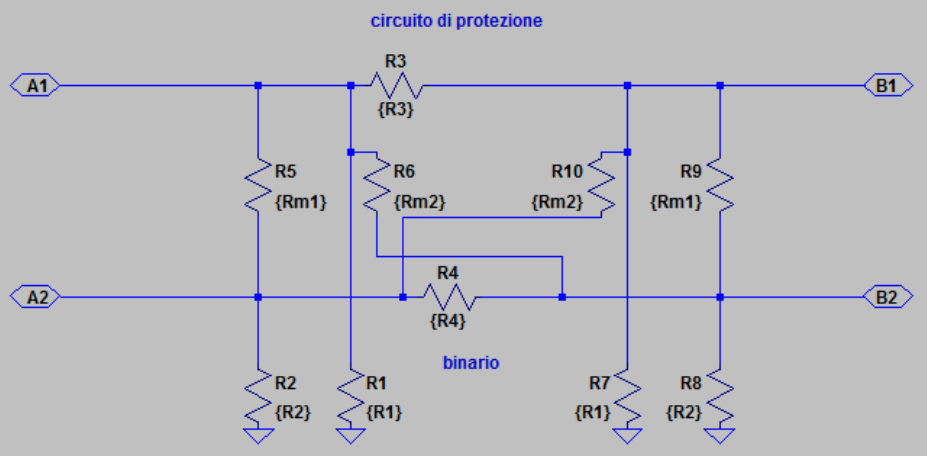
con elementi, matrice del tipo 2×2, di seguito definiti:

$$
\begin{aligned}
Y_{11} &= Y_{22} \\
&= T_I (e^{\gamma L} - e^{-\gamma L})^{-1} (e^{\gamma L} + e^{-\gamma L}) \gamma^{-1} T_I^{-1} G && (34a) \\
Y_{12} &= Y_{21} \\
&= -2 T_I (e^{\gamma L} - e^{-\gamma L})^{-1} \gamma^{-1} T_I^{-1} G && (34b)
\end{aligned}
$$

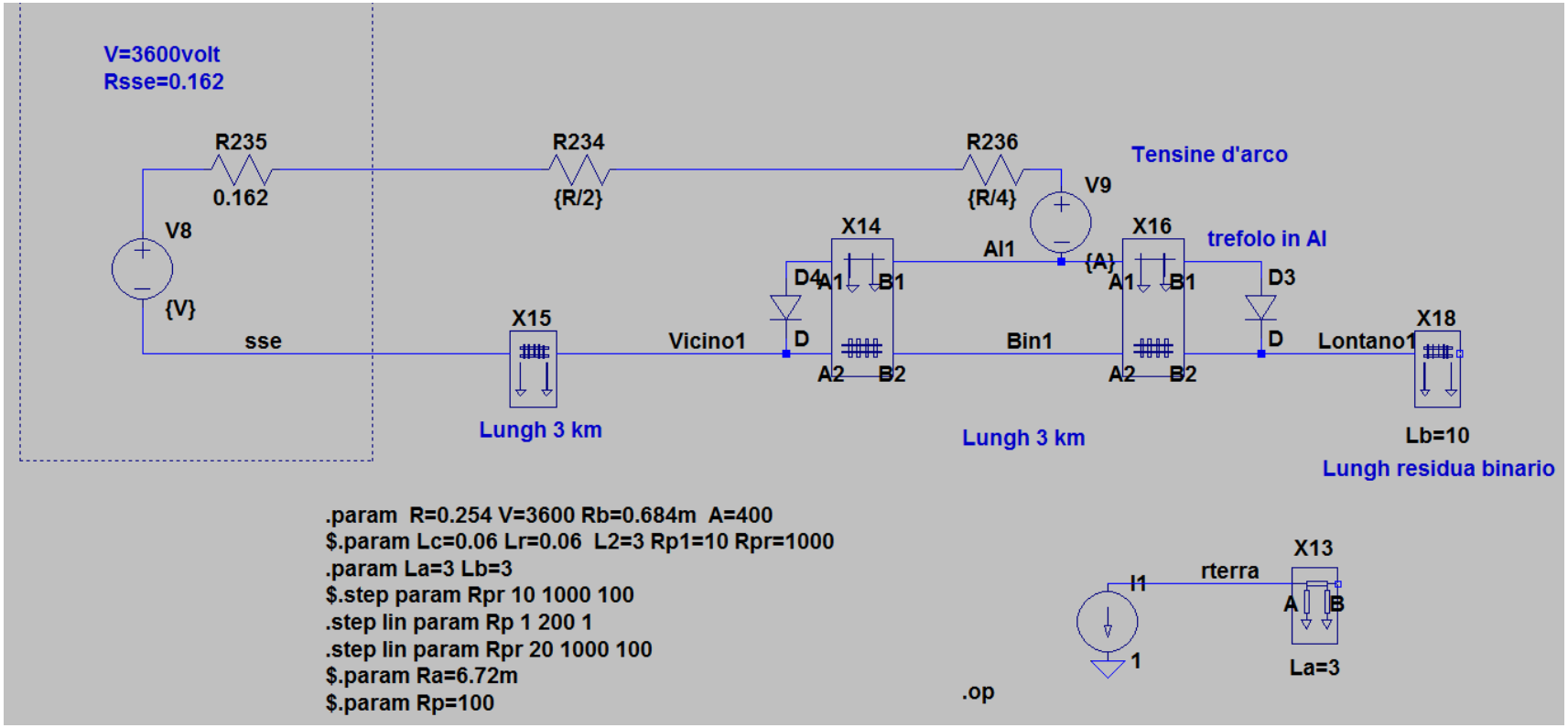
il modello circuitale della matrice Y può essere riportato al seguente

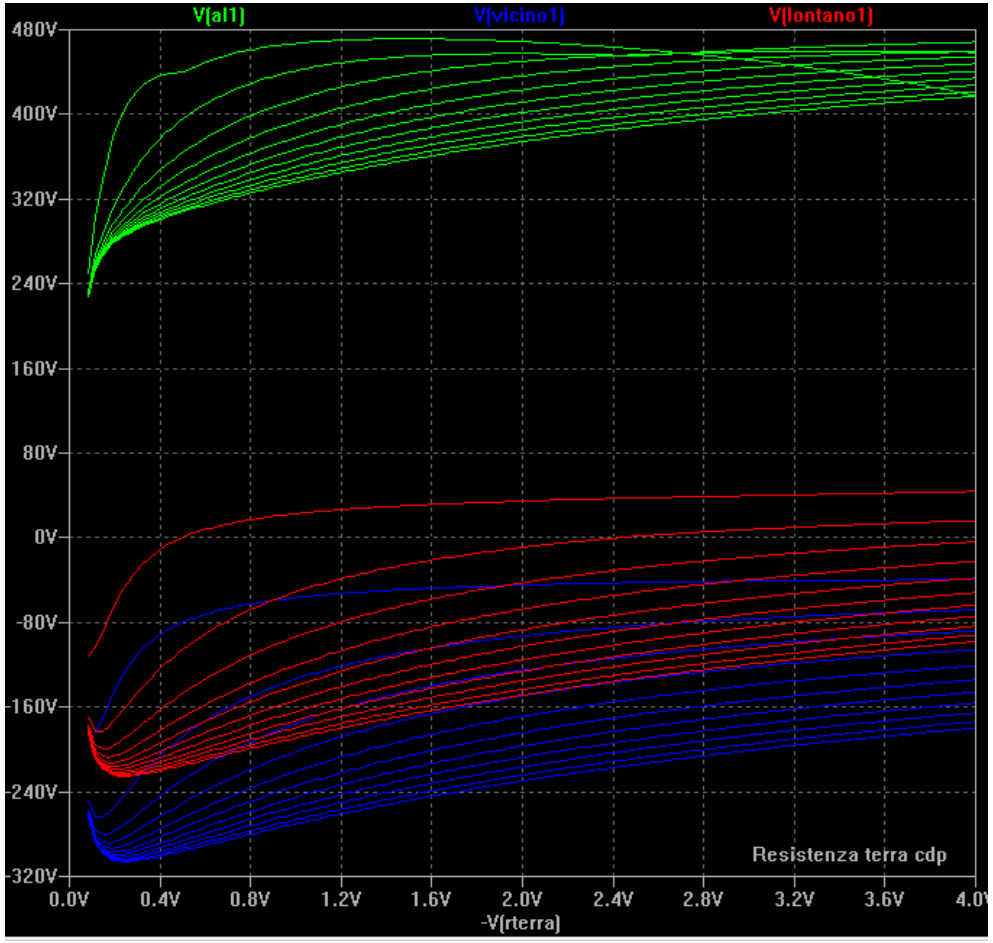



SSE
L [3km]




```
.param {Rp}=1 {Rpr}=2  L=1.5
.param r11=0.112 r22=0.0169/2 Lc=0.06 g11=1/(Rp*Lc) g22=1/(Rpr*Lc) gm=0.1*min(g11,g22)
.param a=r11*(g11+gm)  b=r11*gm  c=r22*(g22+gm)  d=r22*gm
.param g1q=(a+c)/2+sqrt(pwr((a-c)/2,2)+b*d)
.param g2q=(a+c)/2-sqrt(pwr((a-c)/2,2)+b*d)
.param dtv=(g1q-g2q)*(a-g2q)
.param yy1=(1/r11)*((c+b)-g1q)*(c-g1q)*sqrt(g1q)*tanh(L/2*sqrt(g1q))+gm*sqrt(g2q)*((a+d)-g2q)*tanh(L/2*sqrt(g2q))
.param R1=dtv/yy1
.param yy2=(1/r22)*((a+d)-g2q)*(a-g2q)*sqrt(g2q)*tanh(L/2*sqrt(g2q))+gm*sqrt(g1q)*((b+c)-g1q)*tanh(L/2*sqrt(g1q))
.param R2=dtv/yy2
.param yy12=-gm*(c-g1q)*(sqrt(g1q)/tanh(L/2*sqrt(g1q))+sqrt(g2q)/tanh(L/2*sqrt(g2q)))
.param Rm1=dtv/yy12
.param yy14=gm*(c-g1q)*(sqrt(g1q)/sinh(L*sqrt(g1q))+sqrt(g2q)/sinh(L*sqrt(g2q)))
.param Rm2=dtv/yy14
.param yy13=(1/r11)*pwr((c-g1q),2)*sqrt(g1q)/sinh(L*sqrt(g1q))+d*gm*sqrt(g2q)/sinh(L*sqrt(g2q))
.param R3=dtv/yy13
.param yy24=(1/r22)*pwr((a-g2q),2)*sqrt(g2q)/sinh(L*sqrt(g2q))+b*gm*sqrt(g1q)/sinh(L*sqrt(g1q))
.param R4=dtv/yy24
```


V=3600volt
Rsse=0.162
R235
0.162
R234
{R/2}
R236
{R/4}
V9
Tensine d'arco
V8
{V}
sse
X14
X16
trefolo in Al
Al1
{A}
D4
A1
B1
A2
B2
D3
D
X15
Vicino1
Bin1
Lontano1
X18
Lungh 3 km
Lungh 3 km
Lb=10
Lungh residua binario
.param R=0.254 V=3600 Rb=0.684m A=400
$.param Lc=0.06 Lr=0.06 L2=3 Rp1=10 Rpr=1000
.param La=3 Lb=3
$.step param Rpr 10 1000 100
.step lin param Rp 1 200 1
.step lin param Rpr 20 1000 100
$.param Ra=6.72m
$.param Rp=100
.op
I1
1
rterra
X13
A
B
La=3


V(al1)
V(vicino1)
V(lontano1)
480V
400V
320V
240V
160V
80V
0V
-80V
-160V
-240V
-320V
0.0V
0.4V
0.8V
1.2V
1.6V
2.0V
2.4V
2.8V
3.2V
3.6V
-V(rterra)
Resistenza terra cdp

Bibliografia

- Giuseppe Guidi Buffarini; Guido Guidi Buffarini Analisi funzionale di gruppi raddrizzatori 3 kv c.c. medinte programmi dedicati di simulazione. Ingegneria Ferroviaria n.7, 1996.
- A. Fumi; G. Nannarone. Le correnti ed i pericoli di corrosione nei ferri di armatura di viadotti e gallerie. Ingegneria Ferroviaria n.5, 1984.
- R. Paul Clayton Analysis of multiconductor transmission lines. Ediz. Wiley 2008

Vi ringrazio per la vostra attenzione!